Zur Existenz äquivarianter Yang-Mills-Zusammenhänge

Von der Fakultät fur Mathematik der Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von

Laura Anderle
aus Nürnberg

Referent:	Prof. Dr. Andreas Gastel
Koreferent:	Prof. Dr. Ernst Kuwert
Datum der mündlichen Prüfung:	28.01.2016

Zusammenfassung

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M, ein Prinzipalfaserbündel P über M, einen Zusammenhang $D + A$ von P ist das Yang-Mills-Funktional definiert als

$$\mathrm{YM}(D + A) := \int_M |F_{D+A}|^2 \, dx,$$

wobei F_{D+A} die Krümmung von $D + A$ bezeichnet.

Wir fixieren eine Lie-Gruppe K, die auf M und P operiert, sodass die Kohomogenität der K-Operation auf M höchstens vier ist. Indem wir YM auf der Menge der Zusammenhänge, die unter diesen K-Operationen äquivariant sind, minimieren und Palais' Prinzip der symmetrischen Kritikalität anwenden, zeigen wir die Existenz einer K-äquivarianten Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung zu YM fast überall auf M. Diese Lösung ist im Allgemeinen ein Zusammenhang eines von P verschiedenen Bündels.

Um dies zu erreichen, zeigen wir zunächst, dass es lokal in M passende Eichtransformationen gibt (die nicht notwenigerweise Coulomb-Eichungen sind), wenn eine Kleinheitsbedingung an die Krümmung des betrachteten Zusammenhangs erfüllt ist (dafür modifizieren wir einen bekannten Eichsatz von Meyer und Rivière).
Mit Hilfe dieses Eichsatzes und der direkten Methode der Variationsrechnung erhalten wir fast überall auf M lokale Lösungen der YM-Gleichung. Diese setzen wir zusammen zu einem Zusammenhang eines Bündels über M ohne eine Ausnahmemenge der Kodimension vier.

Schlüsselwörter:
Eichtheorie, Yang-Mills, Eichsatz, Coulomb-Eichung, Äquivarianz, superkritische Dimension, symmetrische Kritikalität, direkte Methode der Variationsrechnung

Abstract

For a compact Riemannian manifold M, a principal fiber bundle P over M, and a connection $D + A$ of P, the Yang-Mills functional is defined as

$$\mathrm{YM}(D + A) := \int_M |F_{D+A}|^2 \, dx,$$

where F_{D+A} denotes the curvature of $D + A$.

We fix a compact Lie group K acting on M and P, such that the cohomogenity of the K-action on M is less or equal to four. By minimizing YM among all connections that are equivariant under the action of K and using Palais' principle of symmetric criticality, we show the existence of a solution of the Euler-Lagrange equation of YM almost everywhere on M. In general, this solution is a connection of a bundle different from P.

In order to obtain this result we prove the local existence of good equivariant gauges (which are not necessarily Coulomb gauges) under a smallness assumption on the curvature of the regarded connection (by modifying a well-known Coulomb gauge theorem by Meyer and Rivière).
By using this gauge theorem and the direct method of the calculus of variations, we obtain local solutions to the YM-equation almost everywhere on M. Then we assemble those local solutions to a connection of a bundle over $M' \subset M$, where $M \setminus M'$ has codimension-four.

Key words:
Gauge theory, Yang-Mills connection, Coulomb gauge, equivariance, supercritical dimension, symmetric criticality, direct method of the calculus of variations.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **9**
1.1 Das Yang-Mills-Funktional 9
1.2 Das Yang-Mills-Funktional in superkritischer Dimension 12
1.3 Äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge 12
1.4 Eigener Ansatz 13
1.5 Gliederung dieser Arbeit 16
1.6 Danke. 17

2 Grundlagen über Faserbündel und Gruppenoperationen **19**
2.1 Prinzipalfaserbündel und assoziierte Bündel 19
2.1.1 Faserbündel, Prinzipalfaserbündel 19
2.1.2 Zu Prinzipalfaserbündeln assoziierte Faserbündel 23
2.1.3 Zusammenhänge 25
2.1.4 Eichtransformationen 29
2.1.5 Sobolev-Räume in der Eichtheorie 31
2.1.6 Morrey-Sobolev-Räume in der Eichtheorie 35
2.1.7 Das Yang-Mills-Funktional 38
2.2 Gruppenoperationen und Symmetrien 41
2.2.1 Allgemeines zu kompakten Transformationsgruppen 41
2.2.2 Gruppenoperationen und Äquivarianz auf Bündeln 49
2.2.3 Definition von Gruppenoperationen von K_{x_0} 53

3 Voraussetzungen dieser Arbeit **59**
3.1 Voraussetzungen und Notationen 59
3.2 Beispiel 59
3.2.1 Gruppenoperation der Kohomogenität 0 60
3.2.2 Gruppenoperation der Kohomogenität $\leqslant 4$ 62

4 Ein äquivarianter Eichsatz **65**
4.1 Existenz einer K_{x_0}-äquivarianten Eichtransformation im flachen Fall . 67
4.2 Anpassung auf Mannigfaltigkeiten 70
4.3 Auswahl einer Scheibe 74
4.4 Äquivariante Fortsetzung auf den Schlauch 77

5 Ein Existenzresultat für äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge 83
5.1 Ein lokales Existenzresultat für äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge 83
5.1.1 Konstruktion der Überdeckung $(U_\alpha^\delta)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ von $M_{4\delta}^4$ 85
5.1.2 Lokales Umeichen einer Minimalfolge auf U_α^δ liefert dort Konvergenz 92
5.1.3 $D + A_\alpha^\delta$ erfüllt auf U_α^δ die YM-Gleichung 95
5.1.4 Grenzübergang $\delta \searrow 0$ 98
5.2 Existenz eines K-äquivarianten Yang-Mills-Zusammenhangs fast überall 98

6 Zusammenfassung und Ausblick 107

Literaturverzeichnis 109

1 Einleitung

1.1 Das Yang-Mills-Funktional

Das Yang-Mills-Funktional, das in dieser Arbeit näher betrachtet werden soll, wurde zuerst im Zusammenhang mit dem physikalischen Phänomen des Isospin beschrieben: Heisenberg kam 1932 zu der Vermutung, dass Protonen und Neutronen nur zwei unterschiedliche Zustände desselben Teilchens darstellen; diese Zustände bezeichnete er als Isospin und stellte die Grundlagen eines mathematischen Modells dafür auf: Einem Teilchen, das sich an einer beliebigen Stelle der Raumzeit befindet, werden dafür zwei komplexe Zahlen zugeordnet, deren quadrierte Beträge sich zu Eins aufaddieren. Die Gruppenoperation von $SU(2)$ auf $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ modelliert hierbei den Übergang zwischen unterschiedlichen Zuständen des Teilchens in Bezug auf dessen Isospin. Diese Theorie bauten Yang und Mills 1954 in [YM54] aus. Eine grundlegende Erkenntnis dabei besteht in der *Eichinvarianz* des Modells: Die zwischen zwei Nukleonen auftretenden Kräfte sind invariant unter von der Position der Teilchen abhängenden "Drehungen" von S^3 im Modell von Heisenberg, so genannten Eichtransformationen. (Grob gesagt bedeutet das, dass physikalisch relevante Größen nicht davon abhängen können, in welcher Orientierung S^3 an jeden einzelnen Punkt der Raumzeit "gehängt" wird). Der Betrag von Feldstärken ändert sich unter solchen Eichtransformationen nicht (die zugehörigen Potentialfunktionen aber schon). Die L^2-Norm dieser Feldstärke stellt demnach ein physikalisch und geometrisch sinnvolles Funktional dar, da es nicht von willkürlichen Auswahlen abhängt:

Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (im Falle des Isospins ist M statt dessen die Raumzeit). Über M sei das Prinzipalfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ mit kompakter Lie-Gruppe G als Faser gegeben (im Falle des Isospins: $G = SU(2)$). Dann entsprechen Eichtransformationen speziellen Isomorphismen von P auf sich selbst. Ein Zusammenhang von P beschreibt ein Untervektorbündel des Tangentialbündels TP an P, das bestimmte Voraussetzungen erfüllt (und entspricht im physikalischen Modell einer Potentialfunktion). Grob gesagt liefert die Auswahl dieses Untervektorbündels eine Aussage darüber, wie unterschiedliche Fasern von P identifiziert werden, also "zusammenhängen". Für analytische Zwecke ist es jedoch meist sinnvoller, Zusammenhänge zu identifizieren mit kovarianten Ableitungen auf einem zu P assoziierten Vektorbündel adP (welches die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu G als Faser hat):

Die kovarianten Ableitungen von adP bilden einen affinen Raum: Fixiert man eine kovariante Ableitung D, so kann man zu jeder anderen kovarianten Ableitung ∇ von adP eine adP-wertige Einsform $A \in \Omega^1(adP)$ finden, sodass $\nabla = D + A$ (dabei bezeichne $\Omega^k(adP)$ den Raum der glatten adP-wertigen k-Formen auf M).

Für eine solche kovariante Ableitung $D+A$ kann man definieren, was ihre Krümmung ist:

$$F_{D+A} := (D+A) \circ (D+A),$$

wobei das äußere $D+A$ die natürliche Fortsetzung von $D+A$ zu einer kovarianten äußeren Ableitung $D+A : \Omega^1(adP) \to \Omega^2(adP)$ bezeichnet. Ist $F_{D+A} = 0$, so bedeutet das also, dass Richtungsableitungen bezüglich der kovarianten Ableitung $D+A$ vertauschen.

Man kann nachrechnen, dass

$$F_{D+A} = DA + [A, A]$$

tensoriell ist und daher aufgefasst werden kann als $F_{D+A} \in \Omega^2(adP)$. Im Modell für den Isospin entspricht F_{D+A} einer Feldstärke.

Das *Yang-Mills-Funktional* bezeichnet nun die L^2-Norm dieses Krümmungstensors:

$$\mathrm{YM}(D+A) := \int_M |F_{D+A}(x)|^2 \, dx.$$

Das Infimum und spezielle kritische Punkte dieses Funktionals liefern dabei vom Standpunkt der Physik aus gesehen eine Aussage darüber, welche Potentialfunktionen in der Natur vorkommen. Aus geometrischer Sicht liefern sie Erkenntnisse über topologische Eigenschaften des zugrunde liegenden Bündels (siehe zum Beispiel [Don83] für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten).

Damit eine Chance besteht, dass dieses Infimum angenommen wird, sollte man es über einem vollständigen Raum bilden. Man kann leicht nachrechnen, dass dabei $(W^{1,2} \cap L^4)\Omega^1(adP)$ (also der Abschluss von $\Omega^1(adP)$ unter der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,2}} + \|\cdot\|_{L^4}$) eine natürliche Wahl wäre.

Der Wert des Yang-Mills-Funktionals ist invariant unter der Anwendung von Eichtransformationen. (Generell bezeichnet man die Beschäftigung mit Funktionalen, die diese Invarianz aufweisen, als Eichtheorie – und das Yang-Mills-Funktional ist eines der grundlegendsten eichtheoretischen Funktionale.) Das liegt an Kürzungseffekten, die bei der Berechnung der Krümmung auftreten. Die Normen von A, insbesondere die $W^{1,2}$- und L^4-Norm, ändern sich dagegen, wenn eine Eichtransformation angewandt wird. Will man nun das Minimum von YM bestimmen, so bringt dies einen entscheidenden Nachteil mit sich:

Da die Menge der Eichtransformationen eine unendlichdimensionale Symmetriegruppe ist und die Anwendung von Eichtransformationen zwar die Normen der Zusammenhangsform A verändert, den Wert des Yang-Mills-Funktionals aber nicht, ist YM nicht koerziv. Koerzivität ist jedoch eine notwendige Bedingung dafür, die direkte Methode der Variationsrechnung anwenden und damit die Existenz von Minimierern zeigen zu können.

1982 behob Karen Uhlenbeck (in [Uhl82a]) dieses Problem, indem sie (für den Fall, dass M höchstens vierdimensional ist) einen wichtigen Satz über die Umeichung von Zusammenhängen bewies: Da die Nicht-Koerzivität des Yang-Mills-Funktionals mit seiner Eichinvarianz zusammenhängt, besteht der Ansatz dabei darin, lokal auf kleinen Kugeln $B \subset M$, auf denen $\|F_{D+A}\|_{L^2(B)}$ hinreichend klein ist, eine bestimmte Eichung zu fixieren: Für diese ist die $W^{1,2}$-Norm der umgeeichten Zusammenhangsform beschränkt gegen den Wert des Yang-Mills-Funktionals. Unter der Nebenbedingung, dass diese spezielle "Coulomb-Eichung" angewandt wurde, wird das Funktional demnach lokal koerziv.

Ist die Dimension der Basis-Mannigfaltigkeit kleiner als vier, so lässt sich mit Hilfe dieses Eichsatzes und der direkten Methode der Variationsrechnung die Existenz eines glatten (globalen) Yang-Mills-Zusammenhangs von $(P, \pi, M; G)$ zeigen: Ausgehend von einer Minimalfolge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kann man lokal auf kleinen Kugeln B_α, auf denen der Eichsatz angewandt werden kann, übergehen zur umgeeichten Folge. Diese auf B_α umgeeichte Folge ist beschränkt in $W^{1,2}$ und hat daher eine schwach konvergente Teilfolge. Man kann zeigen, dass die so gefundenen Minimierern auf kleinen Kugeln glatt sind; demnach handelt es sich um klassische Lösungen der Yang-Mills-Gleichung, von denen man beweisen kann, dass sie aus einer glatten Zusammenhangsform auf ganz M hervorgehen.

Ist M vierdimensional, so kann eine endliche Menge von Punkten auftreten, bei denen die Krümmung der entsprechenden Folgenglieder nicht gleichmäßig beschränkt ist. Um diese Punkte gibt es also keine Kugeln, auf denen der Eichsatz auf alle Folgenglieder angewandt werden kann. Daher kann mit der direkten Methode der Variationsrechnung nur außerhalb dieser Punktmenge die Existenz eines Yang-Mills-Zusammenhangs gezeigt werden (siehe [Sed82]). Auf dieser Punktmenge kann dieser Zusammenhang zwar zu einem glatten Zusammenhang ergänzt werden; dieser kann jedoch ein Zusammenhang eines von P verschiedenen Bündels sein, das nur noch bestimmte topologische Invarianten mit P gemeinsam haben muss (siehe [Uhl82b]).

Da die Dimension vier nicht nur der Grenzfall für die Anwendung des besagten Eichsatzes ist, sondern auch einen Grenzfall für die Regularitätstheorie der Euler-Lagrange-Gleichung zum Yang-Mills-Funktional darstellt, bezeichnet man Vier auch als die kritische Dimension von YM.

1.2 Das Yang-Mills-Funktional in superkritischer Dimension

Über Mannigfaltigkeiten M, die mehr als vierdimensional sind, gibt es keinen ähnlich allgemeinen Eichsatz – demnach ist über das Yang-Mills-Funktional in diesem Fall weniger bekannt.

Auf Kugeln $B \subset M$, auf denen die Morrey-Norm $\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}$ hinreichend klein ist, lässt sich jedoch ein analoges Ergebnis erzielen (dies wurde bewiesen von Tao und Tian [TT04] und unabhängig davon auch von Meyer und Rivière [MR03]). Insbesondere lässt sich dieser neuere Eichsatz auf stationäre schwache Yang-Mills-Zusammenhänge anwenden, also auf schwache Lösungen der Yang-Mills-Gleichung, für die zusätzlich

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_M |(\psi_t^X)^* F_{D+A}|^2 \, dx = 0 \quad \text{für alle Vektorfelder } X \in \Gamma(TM)$$

gilt (wobei $\psi_t^X(x) = \exp_x(tX)$). Dies folgt aus einer Monotonieformel von Price ([Pri83]), die besagt, dass die Krümmungen dieser speziellen Lösungen automatisch im Morrey-Raum L^2_4 liegen.

Implizit verwendet Tian auch schon in [Tia00] dieses Resultat, um Folgen von glatten Yang-Mills-Zusammenhängen zu untersuchen. Unter Verwendung eines geeigneten Lösungsbegriffs konnte er so ein Kompaktheitsresultat für Modulräume von Yang-Mills-Zusammenhängen beweisen.

Im bislang unveröffentlichten Preprint [PR13] erzielen Petrache und Rivière ein sehr allgemeines und entscheidendes Ergebnis zur Existenz von Yang-Mills-Zusammenhängen auf fünfdimensionalen Mannigfaltigkeiten (und kündigen in diesem Artikel ein analoges Ergebnis für Mannigfaltigkeiten jeder Dimension an). Die Erkenntnis, dass das zugrunde liegende Bündel beim Minimierungsprozess "springen" kann, greifen sie auf und minimieren das Yang-Mills-Funktional nicht wie gewohnt unter Zusammenhangsformen in $W^{1,2} \cap L^4$, sondern variieren das zugrunde liegende Bündel gleichzeitig mit der Zusammenhangsform. So schaffen sie es, das Minimierungsproblem für YM zu einem wohlgestellten Problem zu machen und können mit Hilfe von Methoden der geometrischen Maßtheorie unter sehr schwachen Voraussetzungen ($A \in L^2(B^5, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^5)$, sodass $dA + [A, A] \in L^2$) Existenz und ein optimales Regularitätsresultat zeigen.

1.3 Äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge

Ein anderer Ansatz, um für spezielle Bündel über mehr als vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten einen Eichsatz und somit Existenzresultate zu erhalten, besteht darin, zuvor eine Nebenbedingung an die betrachteten Zusammenhänge festzulegen: Parker (in [Par92]) und Råde (im unveröffentlichten Preprint [Rad97]) stellten fest, dass für Zusammenhänge, die geeignete Symmetrien aufweisen, ein Eichsatz bewiesen werden kann. (Zuvor hatten Urakawa und Park in [Ura88] und [PU04] bereits sehr spezielle Symmetrien genutzt, um die Euler-Lagrange-Gleichung für das Yang-Mills-Funktional auf ein System algebraischer Gleichungen beziehungsweise gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen.)

Dabei handelt es sich um Symmetrien unter einer vorgegebenen kompakten Lie-Gruppe K, die isometrisch auf M und in geeigneter Weise auf dem Bündel P operiert.

Parker (im Spezialfall $\dim(M) = 4$) und Råde setzen nun voraus, dass die Kodimension $\dim(M) - \dim(Kx)$ *jedes* Orbits Kx höchstens drei beträgt. In diesem Fall ist die Morrey-Norm $\|F_{D+A}\|_{L^2_3}$ abgeschätzt gegen $\|F_{D+A}\|_{L^2}$; sie können einen passenden Eichsatz beweisen und so zeigen, dass das Infimum

$$\inf\{\mathrm{YM}(D + A) :\ D + A \text{ erfüllt die vorgegebene Symmetriebedingung}\}$$

angenommen wird (der besagte Eichsatz entspricht dabei dem später bewiesenen aus [TT04] und [MR03] unter stärkeren Voraussetzungen). Die K-äquivariante Zusammenhangsform, in der dieses Infimum angenommen wird, stellt im Allgemeinen kein globales Minimum des Yang-Mills-Funktionals dar, jedoch kann man Palais' "Prinzip der symmetrischen Kritikalität" darauf anwenden und somit zeigen, dass es sich um einen kritischen Punkt des Yang-Mills-Funktionals handelt.

Damit das Prinzip der symmetrischen Kritikalität angewandt werden kann, muss dabei sichergestellt werden, dass der erhaltene Grenzwert auch selbst wieder K-äquivariant ist – was angesichts der vorgenommenen Umeichung, die im Allgemeinen selbst nicht äquivariant ist, ein Problem darstellt. Während dies eine Lücke in Parkers Beweis darstellt, definiert Råde eigens zu diesem Zweck Äquivarianz von Zusammenhangsformen auf eine spezielle, "schwächere" Art, die stabil unter Umeichung ist.

1.4 Eigener Ansatz

Hierbei fällt auf, dass die Bedingung an die Gruppenoperationen, dass die Kodimension aller Orbits höchstens drei betragen darf, eine sehr starke Einschränkung an die erlaubten Symmetrien ist: Im Allgemeinen kommen bei Gruppenoperationen *singuläre Orbits* vor, darunter auch solche mit einer niedrigeren Dimension als $m - 3$ (und somit einer höheren Kodimension als drei).

Daher soll der Ansatz von Råde hier verallgemeinert werden: einerseits sollen auch Gruppenoperationen mit singulären Orbits zugelassen werden, andererseits sollen die Ergebnisse auf Gruppenoperationen der Kohomogenität vier erweitert werden. In diesem Fall ist ein Resulat analog zu dem von [Sed82] auf vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten zu erwarten: insbesondere liegt der Verdacht nahe, dass auf diese Art ein

Yang-Mills-Zusammenhang nicht auf der ganzen Mannigfaltigkeit gefunden werden kann und dass dieser möglicherweise ein Zusammenhang eines anderen Bündels als P sein könnte.

Genauer soll hier unter passenden Voraussetzungen gezeigt werden:

Es existiert ein K-äquivarianter Yang-Mills-Zusammenhang auf einer Teilmenge $M' \subset M$.

Dabei hat $M \setminus M'$ endliches $(m-4)$-dimensionales Hausdorff-Maß und setzt sich zusammen aus all denjenigen singulären Orbits, deren Kodimension kleiner als vier ist, und höchstens abzählbar vielen Orbits der Kodimension vier.

Diesen Yang-Mills-Zusammenhang findet man mit der direkten Methode der Variationsrechnung unter Verwendung einer YM*-Minimalfolge von Zusammenhängen eines Prinzipalfaserbündels P über M. Der erhaltene Yang-Mills-Zusammenhang kann ein Zusammenhang eines von P verschiedenen Bündels über M' sein.*

Dabei ist es von großer Wichtigkeit, sicherzustellen, dass dieses neue Bündel, in welchem der Minimierer gefunden wird, überhaupt eine K-Operation zulässt. Dafür ist es unvermeidbar, zu zeigen, dass im Minimierungsprozess K-äquivariante passende Umeichungen verwendet werden können, da aus diesen Eichtransformationen die "Übergangsabbildungen" des neuen Bündels hervorgehen. Wir legen uns daher darauf fest, keinen schwachen Äquivarianzbegriff wie bei Råde zu verwenden, sondern einen "starken" Äquivarianzbegriff, der nur unter ebenfalls äquivarianten Eichtransformationen erhalten bleibt:

Dafür sei die Operation auf M durch $k : M \to M$ bezeichnet und diejenige auf adP durch $\lambda_k : adP \to adP$. Diese beiden Operationen induzieren eine natürliche Operation $\tau_k : \Gamma(adP) \to \Gamma(adP)$ auf den Schnitten von adP: Für $Y \in \Gamma(adP)$ sei $(\tau_k Y)(x) := \lambda_k(Y(k^{-1}x))$. Eine kovariante Ableitung D auf adP bezeichnet man nun als K-äquivariant, wenn sie die Bedingung

$$D_{k_* u}(\tau_k Y) = \tau_k(D_u Y)$$

erfüllt. Zu diesem aus [Gas13] übernommenen Begriff muss zunächst ein passender Äquivarianzbegriff für Eichtransformationen gefunden werden.

Da K-äquivariante Zusammenhangsformen $A \in W^{1,2}\Omega^1(adP)$ bereits im Morrey-Raum $W_4^{1,2}(adP|_U)$ liegen (wenn U einen positiven Abstand zu allen Orbits hat, die weniger als $(\dim(M)-4)$-dimensional sind), kann man fast überall auf M den Eichsatz aus [MR03] anwenden. Dabei liefert dieser Eichsatz nur eine Existenzaussage – jedoch ist a priori nicht klar, ob die dort erhaltene Coulomb-Eichung selbst K-äquivariant ist.

Daher muss dieser Satz modifiziert werden, was den Hauptschritt dieser Arbeit darstellt. Dabei kann man nicht, wie sonst häufig im Kontext äquivarianter Funktionen üblich, das klassische Resultat auf der vierdimensionalen Scheibe um x_0 verwenden und durch äquivariantes Fortsetzen auf den ganzen Schlauch übertragen, da es sich um eine Aussage über Differentialformen handelt: Mit einem solchen Argument würde man gewissermaßen nur eine passende Eichtransformation für einige der Komponentenfunktionen von A finden.

Statt dessen wenden wir zuerst auf einer Kugel in einem betrachteten Schlauch U den Eichsatz aus [MR03] an. In dieser Kugel wählen wir eine passende Scheibe aus, auf der passende Abschätzungen für die betrachteten Objekte gelten. Erst danach benutzen wir ein Fortsetzungsargument. Dadurch wird die eigentliche Coulomb-Bedingung aus dem Eichsatz von [MR03] zunichte gemacht, der erhaltene Eichsatz liefert aber dennoch eine Koerzivitätsbedingung.

Nach diesen Vorbereitungen kann man lokal auf Schläuchen die direkte Methode der Variationsrechnung anwenden: Dafür wählt man eine glatte Minimalfolge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des Yang-Mills-Funktionals. Für jede Teilmenge $\tilde{M}$ von M, die positiven Abstand von den "zu singulären" Orbits hat, die weniger als $(\dim(M) - 4)$-dimensional sind, kann man analog zu Sedlacek ([Sed82]) eine Überdeckung mit Schläuchen finden (von $\tilde{M}$ ohne eine endliche Vereinigung $(m - 4)$-dimensionaler Orbits), auf denen eine Teilfolge der $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen für den vorher gezeigten äquivarianten Eichsatz erfüllt. Durch einen Grenzprozess kann man ein Resultat auf der gesamten Mannigfaltigkeit M bis auf eine Ausnahmemenge folgern (welche einerseits aus den Orbits mit zu hoher Kodimension besteht, andererseits aus höchstens abzählbar vielen $(m - 4)$-dimensionalen Orbits, bei denen die Krümmungen der betrachteten Folgenelemente nicht gleichmäßig beschränkt werden können).

Auf jedem Schlauch der Überdeckung ist die umgeeichte (Teilfolge dieser) Minimalfolge in $W^{1,2}$ schwach konvergent – und der erhaltene Grenzwert ist eine schwache Lösung der Yang-Mills-Gleichung.

Dies zeigt bis dahin jedoch nur die Existenz von Lösungen der Yang-Mills-Gleichung auf kleinen Schläuchen. Nun stellt sich die Frage, ob man diese lokalen Zusammenhangsformen zusammensetzen kann zu einer einzigen Zusammenhangsform auf der ganzen Mannigfaltigkeit bis auf die Ausnahmemenge. Dafür muss gezeigt werden, dass es auf den Schnittmengen der Schläuche glatte Eichtransformationen gibt, welche die lokalen Zusammenhangsformen ineinander überführen. In dieser Arbeit wird dies streng genommen nur für flache Mannigfaltigkeiten gezeigt; um diese Bedingung zu eliminieren, müsste noch der Coulomb-Eichsatz aus [MR03] (Theorem 1.3, Seite 199) sowie ein Regularitätslemma aus [MR03] (Lemma 4.10, Seite 214; dieses besagt, dass spezielle Yang-Mills-Zusammenhänge nach Anwendung einer Coulomb-Eichtransformation bereits glatt sind) auf allgemeine Mannigfaltigkeiten angepasst werden, was im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr möglich war.

Damit ist die Existenz eines K-äquivarianten Zusammenhangs auf M bis auf eine Ausnahmemenge mit endlichem $(m-4)$-dimensionalem Hausdorff-Maß bewiesen. Wie nach den Resultaten aus [Sed82] bereits zu erwarten war, kann dieser in einem neuen Bündel liegen.

1.5 Gliederung dieser Arbeit

Diesen Plänen entsprechend gliedert sich die vorliegende Arbeit folgendermaßen:

- Zunächst werden in Kapitel 2 einige Grundlagen über Faserbündel (Abschnitt 2.1) und kompakte Transformationsgruppen (Abschnitt 2.2) zusammengetragen, die für das Verständnis dieser Arbeit nötig sind. Insbesondere wird dort darauf eingegangen, wie kompakte Lie-Gruppen auf kompatible Weise auf Eichtransformationen und Zusammenhangsformen operieren; weiterhin wird dort (in Unterabschnitt 2.2.3) eine glatte, isometrische Operation von Isotropiegruppen K_{x_0} auf kleinen Umgebungen von $x_0 \in M$ definiert – dies benötigen wir für den Beweis des K-äquivarianten Eichsatzes.

- Mit Hilfe dieser Definitionen können in Abschnitt 3.1 die Voraussetzungen für die hier zu zeigenden Ergebnisse festgelegt werden. An Hand eines Beispiels wird in Abschnitt 3.2 sodann gezeigt, dass es viele interessante Beispiele für Bündel mit Gruppenoperationen gibt, die äquivariante Zusammenhänge haben.

- Unter diesen Voraussetzungen wird zunächst (in Kapitel 4) der oben besagte Eichsatz aus [MR03] auf die hier vorliegende äquivariante Situation angepasst: ist $A \in \Omega^1(adP|_U)$ eine *äquivariante* Zusammenhangsform auf einem Schlauch U, auf dem eine Kleinheitsbedingung an die Krümmung F_{D+A} erfüllt ist, so gibt es eine *äquivariante* Eichtransformation $\sigma \in W_4^{2,2}(P \times_c G|_{U'})$ (wobei U' ein Schlauch mit einem kleineren Radius als dem von U ist), sodass

$$\|\sigma^* A\|_{W_4^{1,2}(U')} \leqslant C\|F_{D+A}\|_{L_4^2(U)}.$$

  - Dafür wird zunächst gezeigt, dass der Eichsatz aus [MR03] bereits Äquivarianzen unter speziellen isometrischen Gruppenoperationen erhält (siehe Abschnitt 4.1). Als eine solche Gruppenoperation kann insbesondere die Operation einer Isotropiegruppe K_{x_0} gewählt werden.

  - Dieses Resultat für Kugeln in $\mathbb{R}^m$ wird sodann in Abschnitt 4.2 auf Kugeln $B_r^M(x_0)$ in der Mannigfaltigkeit M angepasst.

  - Innerhalb dieser Kugel kann, wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wird, eine "Scheibe" (also eine spezielle Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ mit $x_0 \in S$ und $U' \subset KS$) so ausgewählt werden, dass die zuvor erhaltene Eichtransformation auf diese Scheibe eingeschränkt werden kann und dort in den richtigen Funktionenräumen liegt.

  - Die auf diese Scheibe eingeschränkte Eichtransformation kann K-äquivariant fortgesetzt werden – in Abschnitt 4.4 wird gezeigt, dass die so erhaltene Eichtransformation die geforderten Bedingungen erfüllt.

- In Kapitel 5 wird dem eigentlichen Ziel dieser Arbeit, dem Beweis eines Existenzresultats für äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge nachgegangen. Dafür fixieren wir eine K-äquivariante Yang-Mills-Minimalfolge von Zusammenhangsformen $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

  - In Abschnitt 5.1 wird gezeigt, dass jede Teilmenge von M, auf der die oben beschriebenen Morrey-Abschätzungen vorliegen, bis auf eine Ausnahmemenge überdeckt werden kann mit Schläuchen, auf denen der K-äquivariante Eichsatz angewandt werden kann. Auf diesen Schläuchen lässt sich in Analogie zu [Sed82] nach der entsprechenden Umeichung die Existenz einer konvergenten Teilfolge der ursprünglich festgelegten Minimalfolge zeigen. Mittels des Prinzips der symmetrischen Kritikalität kann man nachweisen, dass auf jedem Schlauch der dort erhaltene Grenzwert die Euler-Lagrange-Gleichung zum Yang-Mills-Funktional erfüllt. Durch einen Grenzprozess kann dieses Ergebnis übertragen werden auf eine Teilmenge von M, die sich nur durch eine höchstens $(\dim(M) - 4)$-dimensionale Menge von M unterscheidet.

  - In Abschnitt 5.2 wird danach gezeigt, dass diese lokalen Lösungen der Yang-Mills-Gleichung zusammengesetzt werden können (zumindest wenn M eine flache Mannigfaltigkeit ist). Dafür zeigen wir, dass sie auf Teilmengen der Schläuche, auf denen sie definiert sind, umgeeicht werden können zu *glatten* Zusammenhangsformen. Mit Hilfe dieses Ergebnisses kann gezeigt werden, dass es glatte, K-äquivariante Umeichungen zwischen den lokalen Yang-Mills-Zusammenhängen gibt. Das impliziert schon, dass es ein Bündel über der Vereinigung der betrachteten Schläuche gibt, welches eine K-Operation zulässt und in dem die lokalen Yang-Mills-Zusammehänge durch lokale Umeichungen aus einem einzigen Zusammenhang hervorgehen.

- Dieses Ergebnis lässt noch einige Fragen für weitere Forschungsvorhaben offen, die in Kapitel 6 erläutert werden.

1.6 Danke.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Andreas Gastel für seine Liebe zur Mathematik, seinen grenzenlosen Optimismus, für seine Freundlichkeit und seine Geduld. Weiterhin danke ich meinem Koreferenten Prof. Dr. Ernst Kuwert für sein Interesse an dieser Arbeit. Dr. Jan Swoboda danke ich für sein Interesse an meiner

Arbeit, für die anregenden mathematischen Diskussionen und für seine Freundschaft.

Dr. Andreas Nerf, Andy Wolf, Dr. Volker Krätschmer und Kurosch Hourfar danke ich für die vielen Gespräche und die schöne Atmosphäre in unseren “Wohnzimmer-Büros”.

Ralf Linke, Anna Pien, Dr. Annette Hellbach, Dr. Steffen Münzenmeier, Julia Bucher, Dr. Anna Stephan, Dr. Kristina Kohls und Vera Bommer danke ich für ihre offenen Ohren und großen Herzen. Weiterhin bedanke ich mich bei Dr. Frank Kahrweg und Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebecker dafür, dass sie im richtigen Moment für mich da waren.

2 Grundlagen über Faserbündel und Gruppenoperationen

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, geht es in dieser Arbeit um ein spezielles Variationsproblem auf Prinzipalfaserbündeln, das mit Hilfe von Symmetrieargumenten betrachtet werden soll.

In diesem Kapitel werden die dabei involvierten Bündel und Gruppenoperationen definiert und einige grundlegende Argumente gesammelt, welche für den weiteren Verlauf dieser Arbeit essentiell sind. Weiterhin werden Räume von Schnitten in diesen Bündeln definiert, auf welchen das betrachtete Variationsproblem wohldefiniert ist.

2.1 Prinzipalfaserbündel und assoziierte Bündel

Allgemeine Einführungen zu lokaltrivialen Faserungen und Prinzipalfaserbündeln finden sich zum Beispiel in [Bau09] (Kapitel 2, Seiten 43-72), [Weh04] (Anhang A und B, Seiten 165-192) und [Ble05] (Kapitel 2 und 3, Seiten 34-53). Die hier aufgeführten Definitionen sind in Analogie zu diesen Büchern ausformuliert.

2.1.1 Faserbündel, Prinzipalfaserbündel

Definition 2.1.1 (Faserbündel). *Ein Faserbündel (auch "lokal-triviale Faserung" oder "lokal-triviales Bündel" genannt) mit dem Fasertyp F ist ein Tupel $(E, \pi, M; F)$, für das gilt:*

- *$\pi : E \to M$ ist eine glatte Abbildung zwischen den Mannigfaltigkeiten E und M, F ist eine weitere Mannigfaltigkeit;*
- *um jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subset M$ und einen Diffeomorphismus $\Psi_U : \pi^{-1}U \to U \times F$, sodass $pr_1 \circ \Psi_U \equiv \pi$ ist.*

E bezeichnet man als den Totalraum des Bündels. Solange Missverständnisse ausgeschlossen sind, wird häufig auch das Bündel selbst mit E bezeichnet.
M nennt man den Basisraum, F den Fasertyp, π die Projektion.

Das Paar (U, Ψ_U) nennt man lokale Trivialisierung oder Bündelkarte von $(E, \pi, M; F)$; ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung von M und (für jedes $i \in I$) Ψ_i eine lokale Trivialisierung von E auf U_i, so bezeichnet man $\{(U_i, \Psi_i)\}_i$ als einen Bündelatlas von E.
$\pi^{-1}U$ ist für jedes $U \subset M$ selbst ein Bündel, das man auch als $E|_U$ bezeichnet.
Für $x \in M$ nennt man $E_x := \pi^{-1}x$ die Faser von E über x.

Man bezeichnet das Bündel E als trivial, wenn es einen Diffeomorphismus

$$\Psi : E \to M \times F$$

gibt.

Definition 2.1.2 (Produkte von Bündeln, Unterbündel)**.** *Seien $(E_1, \pi_1, M; F_1)$ und $(E_2, \pi_2, M; F_2)$ zwei Faserbündel über M. Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine Überdeckung von M, $\{(U_i, \Psi_i^1) : i \in I\}$ ein Bündelatlas für E_1 und $\{(U_i, \Psi_i^2) : i \in I\}$ ein Bündelatlas für E_2. Dann definiert man das Produktbündel $(E_1 \otimes E_2, pr_1 \circ (\pi_1 \otimes \pi_2), M; F_1 \times F_2)$ mittels des Bündelatlanten $(U_i, \Psi_i^1 \otimes \Psi_i^2)$.*

Seien $(E_1, \pi_1, M; V_1)$ und $(E_2, \pi_2, M; V_2)$ zwei Vektorbündel mit $V_2 \subset V_1$ und $E_1 \subset E_2$ (als Mannigfaltigkeit). Gibt es eine Abbildung $f : E_1 \to E_2$, sodass $\pi_2 \circ f = \pi_1$ und sodass die Einschränkung auf die Faser $f|_{(E_1)_x} : (E_1)_x \to (E_2)_x$ für jedes $x \in M$ eine lineare Abbildung ist, so bezeichnet man E_2 als Untervektorbündel von E_1.

Definition 2.1.3 (Schnitte in Bündeln)**.** *Unter einem glatten Schnitt in einem Bündel $(E, \pi, M; F)$ verstehen wir eine glatte Abbildung $s : M \to E$, sodass $\pi \circ s = id_M$. Die Menge aller Schnitte in $(E, \pi, M; F)$ bezeichnen wir mit $\Gamma(E, \pi, M; F)$ oder kurz mit $\Gamma(E)$.*
Ist $U \subset M$, so bezeichnen wir jedes Element von $\Gamma(E|_U)$ als lokalen Schnitt.

Definition 2.1.4 (Differentialformen auf Bündeln)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(E, \pi, M; F)$ ein Faserbündel. Einen Schnitt $s \in \Gamma(E \otimes \wedge^k TM) =: \Omega^k(E)$ bezeichnet man als k-Form (oder Differentialform k-ter Ordnung) von E.*

(Dabei werden die zugehörigen Bündel von Differentialformen $\wedge^k TM$ als bekannt vorausgesetzt; für eine Einführung hierzu siehe [Bau09], Anhang A2, Seite 272ff.)

Vektorbündel und Prinzipalfaserbündel sind spezielle Faserbündel, die über zusätzliche Struktur verfügen und Hauptrollen in dieser Arbeit spielen:

Definition 2.1.5 (Vektorbündel)**.** *Ein Faserbündel $(E, \pi, M; V)$ heißt ($\mathbb{R}$-)Vektorbündel vom Rang $m < \infty$, falls Folgendes gilt:*

- *Der Fasertyp V ist ein m-dimensionaler ($\mathbb{R}$-)Vektorraum;*
- *jede Faser E_x des Bündels ist ein ($\mathbb{R}$-)Vektorraum;*

- *es gibt einen Bündelatlas* $\{(U_i, \Psi_i) : i \in I\}$ *(mit einer beliebigen Indexmenge* I*), sodass für alle* $i \in I$ *und alle* $x \in U_i$ *gilt:*

$$pr_2 \circ \Psi_i|_{E_x} : E_x \to V$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus.

Das wohl (zumindest in der Analysis) gebräuchlichste Vektorbündel ist das Tangentialbündel $(TM, \pi, M; \mathbb{R}^m)$ an Riemannsche Mannigfaltigkeiten M mit $\dim(M) = m$. (Für mehr Informationen dazu siehe [GWH72], Kapitel III.1, Seite 87 ff.)

Definition 2.1.6 (Prinzipalfaserbündel)**.** *Ein Faserbündel* $(P, \pi, M; G)$ *heißt Prinzipalfaserbündel mit Strukturgruppe* G*, falls Folgendes gilt:*

- *Der Fasertyp* G *ist eine kompakte Lie-Gruppe;*
- G *wirkt von rechts als Liesche Transformationsgruppe auf* P*; die Wirkung ist fasertreu (das heißt: ist* $p \in P_x$*, so ist auch* $pg \in P_x$ *für alle* $g \in G$*)*
  und einfach transitiv auf den Fasern (das heißt: für alle $p, q \in P_x$ *gibt es ein* $g \in G$*, sodass* $pg = q$*);*
- *jede lokale Trivialisierung von* P *ist* G*-äquivariant; das heißt:* $\Psi_U(p \cdot g) = \Psi_U(p) \cdot g$ *für alle Bündelkarten* (U, Ψ_U)*,* $p \in P|_U$ *und alle* $g \in G$*.*

Für jedes Prinzipalfaserbündel P sind lokale Schnitte äquivalent zu lokalen Trivialisierungen: Ist $\sigma \in \Gamma(P|_U)$ ein lokaler Schnitt in P, so ist durch $\Psi_U(\sigma(x)g) := (x, g)$ eine lokale Trivialisierung $\Psi_U : P|_U \to U \times G$ definiert; umgekehrt definiert jede lokale Trivialisierung $\Psi_U : P_U \to U \times G$ einen lokalen Schnitt $\sigma \in \Gamma(P|_U)$ durch $\sigma(x) := \Psi_U^{-1}(x, e)$. (Siehe [Ble05], Theorem 1.1.5 und Remark 1.1.6, Seite 27.)
Insbesondere gilt: Ist $\Gamma(P) \neq \emptyset$, so ist P ein triviales Bündel.

Ein Beispiel eines Prinzipalfaserbündels ist das *Reperbündel*: Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann definiere für jedes $x \in M$

$$GL(M)_x := \{v_x = (v_1, \ldots, v_m) : \ v_x \text{ ist Basis von } T_xM\}$$

und

$$GL(M) := \bigcup_{x \in M} GL(M)_x$$

als die disjunkte Vereinigung dieser Mengen von Basen. $GL(M)$ ein Prinzipalfaserbündel $(GL(M), \pi, M; GL(m))$, dessen Projektion $\pi : GL(M) \to M$ gegeben ist durch $\pi(v_x) = x$ für alle $x \in M$ und alle $v_x \in GL(M)_x$. Dabei operiert $GL(m)$ von rechts auf der Menge $GL(M)$ durch

$$(v_1, \ldots, v_n) \cdot A := \left(\sum_{i=1}^{m} v_i A_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} v_i A_{in} \right)$$

für $A = (A_{ij}) \in GL(m)$.
Ist $U \subset M$, $V \subset \mathbb{R}^m$ und $\phi : V \to U$ eine lokale Parametrisierung von M, so ist

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \circ \phi^{-1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_m} \circ \phi^{-1} \right) \in \Gamma(GL(M)|_U)$$

ein lokaler Schnitt, definiert also eine lokale Trivialisierung von $GL(M)$ auf U. (Vergleiche [Bau09], Beispiel 2.9, Seite 51.)

Definition und Satz 2.1.7 (Übergangsabbildungen für Prinzipalfaserbündel)**.** *Sei $(P, \pi, M; G)$ ein Prinzipalfaserbündel, I eine Indexmenge und $\{U_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von M. Sei für jedes $i \in I$ mit $\Psi_i : P|_{U_i} \to U_i \times G$ eine lokale Trivialisierung von P über U_i gegeben. Dann ist für jedes $i, j \in I$*

$$\Psi_i \circ \Psi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times G \to (U_i \cap U_j) \times G$$

ein Diffeomorphismus, dessen erste Komponentenabbildung die Identität auf $U_i \cap U_j$ ist.

Definiere $\psi_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ durch

$$\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}(x, g) = (x, \psi_{ij}(x)g)$$

für alle $(x, g) \in (U_i \cap U_j) \times G$.

Die Übergangsabbildungen erfüllen die folgende Kozykelbedingung: Für alle $i, j, k \in I$ ist

$$\psi_{ii} \equiv id_F \quad \textit{und} \quad \psi_{ij} \circ \psi_{jk} \equiv \psi_{ik}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Umgekehrt definiert jede Menge von glatten Abbildungen

$$\{\psi_{ij} : i, j \in I, \ \textit{sodass } U_i \cap U_j \neq \emptyset\}$$

zu einer Überdeckung $\{U_i : i \in I\}$ von M, welche die Kozykelbedingungen erfüllt, ein eindeutiges Prinzipalfaserbündel mit Strukturgruppe G.

(Vergleiche [Bau09], Seite 44 und [Weh04], Seite 166.)

Definition 2.1.8 (Automorphismen)**.** *Ein Faserbündelautomorphismus auf einem Faserbündel $(E, \pi, M; F)$ ist ein Diffeomorphismus $f : E \to E$ mit $\pi \circ f = \pi$.*

Ein Vektorbündelautomorphismus auf einem Vektorbündel $(E, \pi, M; V)$ ist ein Diffeomorphismus $f : E \to E$, sodass $\pi \circ f = \pi$ und sodass die Einschränkung $f|_{E_x} : E_x \to E_x$ für jedes $x \in M$ linear ist.
Die Menge aller Vektorbündelautomorphismen auf E bezeichnet man mit $Aut(E)$.

Ein Prinzipalfaserbündelautomorphismus auf einem Prinzipalfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist ein Diffeomorphismus $f : P \to P$ mit $\pi \circ f = \pi$, sodass $f(pg) = f(p)g$ für alle $p \in P$ und alle $g \in G$.

Weiterhin definieren wir für ein Vektorbündel $(E, \pi, M; V)$ eine Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als einen Schnitt in $Aut(E \otimes E)$, welcher auf jeder Faser $E_x \times E_x$ (mit $x \in M$) eine symmetrische, positiv-definite Bilinearform definiert. Auf jedem Vektorbündel existiert eine Bündelmetrik (siehe [Bau09], Satz 2.10, Seite 61).

Durch Faseraustausch kann man aus Prinzipalfaserbündeln verschiedene weitere Faserbündel konstruieren:

2.1.2 Zu Prinzipalfaserbündeln assoziierte Faserbündel

Definition und Satz 2.1.9 (assoziierte Faserbündel)**.** *Sei $(P, \pi, M; G)$ ein Prinzipalfaserbündel und sei F eine beliebige Mannigfaltigkeit (zum Beispiel eine Lie-Gruppe oder ein Vektorraum), auf dem es eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Diff}(F)$ von G auf F gibt.*

Dann ist das zu P assoziierte Bündel $P \times_\rho F$ definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $\lfloor p, f \rfloor$ in $P \times F$, die durch die Äquivalenzrelation $\lfloor p, f \rfloor = \lfloor pg, \rho(g^{-1})f \rfloor$ (für alle $g \in G$) definiert ist.

$P \times_\rho G$ ist ein Faserbündel mit der Projektion $\pi_{P \times F} \lfloor p, g \rfloor := \pi_P(p)$ (wohldefiniert, da die Operation von G auf P fasertreu ist und $\pi_{P \times F} \lfloor p, g \rfloor$ daher nicht von der Auswahl des Repräsentanten abhängt).

Solange keine Verwechslungsgefahr vorliegt, wird hier, unabhängig von F und ρ, immer $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$ als Notation für die Äquivalenzklassen verwendet.

Beweis. Lokale Trivialisierungen für die assoziierten Faserbündel erhält man aus den lokalen Trivialisierungen von P: Ist $\Psi : P|_U \to U \times G$ eine lokale Trivialisierung von P auf $U \subset M$, so ist durch

$$\Psi^{P \times_\rho F} : (P \times_\rho F)|_U \to U \times F$$

mit

$$\Psi^{P \times_\rho F}(\lfloor p, f \rfloor) := (\pi^P(p), \rho(\Psi_2(p))f)$$

eine lokale Trivialisierung von $P \times_\rho F$ definiert. □

Ist F ein Vektorraum und $\rho : G \to Aut(F)$, so kann man Linearkombinationen der oben definierten Äquivalenzklassen folgendermaßen definieren:

$$c\lfloor p, v \rfloor + d\lfloor p, w \rfloor := \lfloor p, cv + dw \rfloor$$

für alle $c, d \in \mathbb{R}$, $p \in P$, $v, w \in F$.
Unter dieser Definition ist $P \times_\rho F$ in diesem Fall ein Vektorbündel.

Schnitte in zu P assoziierten Faserbündeln $P \times_\rho F$ sind äquivalent zu G-äquivarianten Abbildungen $P \to F$:

Sei dafür $U \subset M$, $p \in \Gamma(P|_U)$ ein lokaler Schnitt in P und $v : P \to F$ eine G-äquivariante Abbildung, in dem Sinne, dass $v(pg) = \rho(g^{-1})v(p)$.
Dann ist $\lfloor p(x), v(p(x)) \rfloor \in \Gamma(P \times_\rho F|_U)$.

Dabei hängt $\lfloor p(x), v(p(x)) \rfloor$ nicht von der Auswahl des P-Schnitts ab, sondern nur von der G-äquivarianten Abbildung $v : P \to F$:
Sei dafür $V \subset M$ und $q \in \Gamma(P|_V)$ ein anderer P-Schnitt. Dann gibt es für jedes $x \in U \cap V$ ein $g_x \in G$, sodass $q(x) = p(x)g_x$ (da G transitiv auf den Fasern von P operiert). Daher gilt für jedes $x \in U \cap V$:

$$\lfloor q(x), v(q(x)) \rfloor = \lfloor p(x)g_x, v(p(x)g_x) \rfloor = \lfloor p(x)g_x, \rho(g_x^{-1})v(p(x)) \rfloor = \lfloor p(x), v(p(x)) \rfloor.$$

Da es in jedem nichttrivialen Prinzipalfaserbündel P nur lokale Schnitte gibt (siehe Abschnitt 2.1.1), kann man auch Schnitte im assoziierten Faserbündel $P \times_\rho F$ nur lokal als Äquivalenzklassen aufschreiben (selbst dann, wenn das assoziierte Faserbündel selbst globale Schnitte zulässt – was zum Beispiel für Vektorbündel immer der Fall ist).

Die in dieser Arbeit wichtigsten Beispiele für Faerbündel, die zu einem Prinzipalfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ assoziiert sind, sind:

- das zu P adjungierte Bündel adP ($F = \mathfrak{g}$, die Lie-Algebra zu G, $\rho(g)v = g^{-1}vg$) und
- $P \times_c G$ ($F = G$, $\rho(g)h = c(g)h := g^{-1}hg$).

Im Gegensatz zu P (wenn P nicht selbst trivial ist) lässt $P \times_c G$ globale Schnitte zu (insbesondere gibt es eine globale Identität $e \in \Gamma(P \times_c G)$).

Ist V ein Vektorraum, $\rho : G \to Aut(E)$ und $E = P \times_\rho V$ ein zu P assoziiertes Vektorbündel, so ist auch die Menge der Vektorbündelautomorphismen zu E (siehe Definition 2.1.8) selbst ein zu P assoziiertes Vektorbündel: $Aut(E) = P \times_{\rho'} Aut(V)$ mit $\rho'(g)M := M\rho(g^{-1})$. Insbesondere werden wir an einigen Stellen $Aut(adP)$ betrachten.

Auf adP kann man (faserweise) eine Lie-Klammer definieren: Sei $p \in P_x$, $v, w \in \mathfrak{g}$, so definiert man: $[\lfloor p, v \rfloor, \lfloor p, w \rfloor] := \lfloor p, [v, w] \rfloor$. Sei $\Psi^{adP} : adP|_U \to U \times \mathfrak{g}$ eine lokale Trivialisierung von adP wie in Definition 2.1.9 und seinen $Y_1, Y_2 \in adP_x$, dann gilt: $\Psi^{adP}([Y_1, Y_2]) = [\Psi^{adP}(Y_1), \Psi^{adP}(Y_2)]$.

Ist F ein Skalarproduktraum mit G-invariantem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, so ist durch

$$\langle \lfloor p, v \rfloor, \lfloor p, w \rfloor \rangle_{P \times_\rho F} := \langle v, w \rangle_F$$

(für alle $p \in P$ und $v, w \in F$) eine Bündelmetrik auf $P \times_\rho F$ gegeben. (Vergleiche [Weh04], Seite 172.)

Da es für jede kompakte Lie-Gruppe G ein G-invariantes Skalarprodukt auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gibt (siehe [Weh04], Theorem A.2, Seite 170), gibt es auch eine G-invariante Bündelmetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_{adP}$ auf adP für jedes G-Prinzipalfaserbündel P.
Dabei gilt: $\langle[Y_1,Y_2],Y_3\rangle_{adP} = \langle Y_1,[Y_2,Y_3]\rangle_{adP}$ (siehe [Weh04], Remark A.3, Seite 171).

$P\times_c G$ operiert durch Linkskonjugation auf adP:
Sei dafür $p\in P$, $h\in G$ und $w\in\mathfrak{g}$. Dann ist $\sigma := \lfloor p,h\rfloor \in P\times_c G$ und $Y := \lfloor p,w\rfloor \in adP$ und man kann die Gruppenoperation von $P\times_c G$ auf adP folgendermaßen definieren:

$$\lfloor p,h\rfloor\lfloor p,w\rfloor := \lfloor p,hwh^{-1}\rfloor.$$

Diese Operation ist eine faserweise lineare Abbildung, also ein Vektorbündelautomorphismus auf adP. Demnach gibt es eine natürliche Einbettung $P\times_c G \hookrightarrow Aut(adP)$.

Insbesondere in Abschnitt 4 ist es notwendig, zu verstehen, wie die Trivialisierungen von adP und $P\times_c G$ zusammenwirken:

Sei $\Psi : P|_U \to U\times G$ eine lokale Trivialisierung von P.
Sei $\psi^{P\times_c G} : (P\times_c G)|_U \to U\times G$ die dazugehörige lokale Trivialisierung von $P\times_c G$ (also $\psi^{P\times_c G}(\lfloor p,g\rfloor) = \Psi(p)^{-1}g\Psi(p))$ sowie $\psi^{adP} : adP|_U \to U\times\mathfrak{g}$ die dazugehörige lokale Trivialisierung von adP (das heißt: $\psi^{adP}(\lfloor p,v\rfloor) = \Psi(p)^{-1}v\Psi(p))$.
Lokale Trivialisierungen für $P\times_c G$ und adP passen zusammen im folgenden Sinne:

$$\begin{aligned}
&\psi^{adP}(\sigma(x)Y(x)) = \psi^{adP}(\lfloor p,hvh^{-1}\rfloor) = \Psi(p)^{-1}hvh^{-1}\Psi(p)\\
&= (\Psi(p)^{-1}h\Psi(p))(\Psi(p)^{-1}v\Psi(p))(\Psi(p)^{-1}h^{-1}\Psi(p))\\
&= \psi^{P\times_c G}(\sigma(x))\psi^{adP}(Y(x))\psi^{P\times_c G}(\sigma(x)^{-1}) = \psi^{P\times_c G}(\sigma(x))\psi^{adP}(Y(x)),
\end{aligned}$$

mit den Notationen von oben.

2.1.3 Zusammenhänge

Zusammenhänge sind ein zentrales Konzept dieser Arbeit; es gibt einige verschiedene äquivalente Definitionen dafür. Für die Äquivalenz dieser Definitionen verweisen wir auf [Ble05].

Definition 2.1.10 (Zusammenhänge in Prinzipalfaserbündeln)**.** *Sei $(P,\pi,M;G)$ ein Prinzipalfaserbündel. Ein Zusammenhang in P ist eine 1-Form $\aleph \in \Gamma(\mathfrak{g}\otimes\wedge^1 TP)$ (also eine $\mathfrak{g}$-wertige Einsform auf P) mit den folgenden Eigenschaften:*

- $\aleph(pg) = g^{-1}\aleph(p)g$ *für alle $p\in P$ und alle $g\in G$.*
- *Für $v\in\mathfrak{g}$ und $\tilde{v}(p) := \frac{d}{dt}|_{t=0}(p\exp(tv)) \in T_pP$ gelte:*

$$\aleph_{\tilde{v}(p)}(p) = v.$$

Jeder Zusammenhang entspricht einer Zerlegung $TP = V \otimes H$ des Tangentialbündels an die Mannigfaltigkeit P, wobei die horizontale Distribution H definiert ist durch

$$H_p = \mathrm{Kern}(\aleph(p)).$$

(Siehe zum Beispiel [Ble05], Theorem 1.2.4, Seite 31).

Satz 2.1.11 (Existenz von Zusammenhängen)**.** *Auf jedem Prinzipalfaserbündel existiert ein Zusammenhang.*

(Siehe [Bau09], Satz 3.4, Seite 84.)

Definition und Satz 2.1.12 (Zusammenhangsformen)**.** *Die Menge der Zusammenhänge eines Prinzipalfaserbündels $(P, \pi, M; G)$ ist ein affiner Raum mit dem Vektorraum*
$\Omega^1(adP)$.
Das heißt: Fixiert man einen Zusammenhang D, so gibt es für jeden weiteren Zusammenhang $\aleph$ von P eine 1-Form $A \in \Omega^1(adP)$, sodass man $\aleph$ identifizieren kann mit $D + A$.
D nennen wir Referenzzusammenhang, A Zusammenhangsform.

(Siehe [Bau09], Folgerung 3.1, Seite 87.)

Definition und Satz 2.1.13 (Lokale Zusammenhangsformen auf M)**.** *Sei $(P, \pi, M; G)$ ein Prinzipalfaserbündel und sei $\{(U_i, \Psi_i) : i \in I\}$ ein Bündelatlas für P mit den Übergangsabbildungen $\psi_{ij} : U_i \cap U_j \to G$. Für jedes $i \in I$ sei $\omega_i \in C^\infty(U_i, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 TM)$ gegeben, sodass für $i \neq j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gilt:*

$$\omega_j = \psi_{ij}^{-1} d\psi_{ij} + \psi_{ij}^{-1} \omega_i \psi_{ij}.$$

Dann gibt es genau einen Zusammenhang $\aleph$ auf P, der durch $\{\omega_i : i \in I\}$ beschrieben wird.

(Siehe [Ble05], Definition 1.2.3 und Theorem 1.2.5, Seite 30f und 32f.)

In Bezug auf analytische Fragestellungen ist es häufig sinnvoll, Zusammenhänge mit kovarianten Ableitungen auf Vektorbündeln zu identifizieren:

Definition 2.1.14 (kovariante Ableitungen)**.** *Sei $(E, \pi, M; V)$ ein Vektorbündel. Eine kovariante Ableitung ∇ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$, welche die Leibniz-Regel*

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma \quad \textit{für alle } f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \textit{ und } \sigma \in \Gamma(E)$$

erfüllt.

Jede kovariante Ableitung $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ induziert eine kovariante Ableitung

$$\nabla : \Omega^k(E) \to \Omega^{k+1}(E)$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$: Sei $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M, dann ist für jedes $\alpha \in \Omega^k(E)$ und $X_0, \ldots X_k \in \Gamma(TM)$:

$$(\nabla\alpha)_{X_0,X_1,\ldots,X_k} := \nabla_{X_0}(\alpha_{X_1,\ldots,X_k}) - \alpha_{\tilde{\nabla}_{X_0}X_1,X_2,\ldots,X_k} - \ldots - \alpha_{X_1,\ldots,X_{k-1}\tilde{\nabla}_{X_0}X_k}.$$

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bündelmetrik auf E. Man bezeichnet eine kovariante Ableitung

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$$

als metrisch (bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$), falls für alle $X, Y \in \Gamma(E)$ und alle $v \in \Gamma(TM)$ gilt:

$$d_v\langle X, Y\rangle = \langle\nabla_v X, Y\rangle + \langle X, \nabla_v Y\rangle.$$

Die totale Ableitung eines Schnitts $Y \in \Gamma(E)$ bezüglich der kovarianten Ableitung bezeichnen wir mit $J^\nabla Y$.

Satz 2.1.15 (Zusammenhänge und kovariante Ableitungen)**.** *Jeder Zusammenhang von P induziert eine kovariante Ableitung auf jedem zu P assoziierten Vektorbündel, insbesondere auf adP und $Aut(adP)$:*
Sei $\aleph \in \Gamma(\mathfrak{g} \otimes \wedge^1 TP)$ ein Zusammenhang von P und sei $P \times_\rho F$ ein zu P assoziiertes Vektorbündel. Dann ist folgendes $\nabla^\aleph$ eine kovariante Ableitung auf $P \times_\rho F$:

$$\nabla^\aleph_v Y(x) := \lfloor p, d_V s(p) + [\aleph_V(p), s(p)]\rfloor,$$

(für $x \in M$, $v \in T_xM$, $p \in \pi^{-1}(x)$ und $V \in T_pP$, sodass $d\pi(p)\{V\} = v$). Dabei sei $Y(x) = \lfloor p, s(p)\rfloor$ (mit einer G-äquivarianten Abbildung $s : P \to F$) ein Schnitt in adP.

Ist F ein Skalarproduktraum, so ist $\nabla^\aleph$ eine metrische kovariante Ableitung bezüglich der induzierten Bündelmetrik auf $P \times_\rho F$.

(Vergleiche [Bau09], Satz 3.12 und Satz 3.13, Seite 99.)

Zu jeder kovarianten Abbildung ∇ auf adP gibt es sogar genau einen Zusammenhang $\aleph$ von P, sodass $\nabla = \nabla^\aleph$. Dies wird in dieser Arbeit ausgenutzt, indem die Frage nach der Existenz eines Yang-Mills-Zusammenhangs auf P auf die Frage nach einer entsprechenden kovarianten Ableitung auf adP zurückgeführt wird.

Ist der Zusammenhang $\aleph \in \Gamma(\mathfrak{g} \otimes \wedge^1 TP)$ gegeben durch einen Referenzzusammenhang und eine Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(adP)$, so ist die durch $\aleph$ induzierte kovariante Ableitung $\nabla^\aleph$ auf adP gegeben durch

$$\nabla^\aleph Y = \nabla^D Y + [A, Y]$$

für alle $Y \in \Gamma(adP)$. Dabei ist $[A, Y] \in \Omega^1(adP)$ definiert durch $[A, Y]_v := [A_v, Y]$.

Zur Erleichterung der Notation bezeichnen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die kovariante Ableitung ∇^D als D; diese Formel wird also zu

$$\nabla^{\aleph} Y = DY + [A, Y].$$

Wegen $P \times_c G \hookrightarrow Aut(adP)$ kann man auch Schnitte $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ mit der von $\aleph$ auf $Aut(adP)$ induzierten kovarianten Ableitung differenzieren.
Ebenso kann man adP als Unterbündel von $Aut(adP)$ auffassen, da jeder Schnitt $Y \in \Gamma(adP)$ (mittels $[Y, \cdot]$) einen Vektorbündelautomorphismus von adP definiert.

(Die Verknüpfung der von $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ und $Y \in \Gamma(adP)$ ist dabei folgendermaßen definiert: für jedes $X \in \Gamma(adP)$ ist

$$(\sigma \circ Y)(X) = [\sigma \circ Y, X] = [\sigma Y \sigma^{-1}, X] = (\sigma Y \sigma^{-1})(X).)$$

Die kovarianten Ableitungen $\nabla^{\aleph, Aut(adP)}|_{adP}$ und $\nabla^{\aleph, adP}$ stimmen überein.

Mittels des Bündelatlanten $\{U_i, \Psi_i\}$ von adP können wir lokal eine kovariante Ableitung auf $adP|_{U_i}$ (und somit einen Zusammenhang von $P|_{U_i}$) definieren:

$$\tilde{D}^i_u Y(x) := \psi_i^{-1} \left(x, d_u((\psi_i)_2 \circ Y)(x) \right).$$

Definition 2.1.16 (Krümmung eines Zusammenhangs)**.** *Sei $(E, \pi, M; V)$ ein Vektorbündel und $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ eine kovariante Ableitung auf E. Man bezeichnet*

$$F_\nabla := \nabla \circ \nabla : \Gamma(E) \to \Omega^2(E)$$

als die Krümmung von ∇.

Demnach ist für alle $Y \in \Gamma(E)$, $x \in M$ und $u, v \in T_x M$

$$(F_\nabla)_{uv} Y(x) = \nabla_u(\nabla_v Y(x)) - \nabla_v(\nabla_u Y(x)).$$

Man kann leicht nachrechnen (siehe [Jos08], Seite 111), dass F_∇ tensoriell ist, also dass $F_\nabla \in \Omega^2(E) \otimes (\Omega^0(E))^* = \Omega^2(Aut(E))$ ist für jede kovariante Ableitung ∇ auf E.

Ist E ein zu einem Prinzipalfaserbündel P assoziiertes Vektorbündel und gilt für die kovariante Ableitung auf E, dass $\nabla = \nabla^{\aleph} = D + A$ (für einen Zusammenhang $\aleph \in \Gamma(\mathfrak{g} \otimes \wedge^1 TP)$, einen Referenzzusammenhang D und $A \in \Omega^1(adP)$), so ist

$$F_{D+A} = DA + \frac{1}{2}[A, A].$$

Dabei ist für $A, B \in \Omega^1(adP)$ die 2-Form $[A, B] \in \Omega^2(adP)$ definiert durch

$$[A, B]_{uv} := [A_u, B_v] - [A_v, B_u]$$

für alle $u, v \in \Gamma(TM)$.

Insbesondere ist dann $F_{D+A} \in \Omega^2(adP) \subset \Omega^2(Aut(E))$.
(Vergleiche [Weh04], Seite 170.)

Für die Krümmung gilt die Bianchi-Identität:

$$\nabla F_\nabla = 0.$$

(Siehe [Jos08], Theorem 3.1.1., Seite 112.)

2.1.4 Eichtransformationen

Definition und Satz 2.1.17 (Eichtransformationen auf Prinzipalfaserbündeln)**.** *Die folgenden Definitionen von Eichtransformationen sind äquivalent:*

- *Ein Automorphismus eines Prinzipalfaserbündels $(P, M, \pi; G)$ ist ein G-äquivarianter Diffeomorphismus $u : P \to P$.*
  Ist u zusätzlich fasertreu (also $\pi(u(p)) = \pi(p)$ für alle $p \in P$), so nennt man u eine Eichtransformation von P.
- *Eine Eichtransformation ist ein Schnitt im Bündel $P \times_c G$.*

(Für die Äquivalenz siehe [Ble05], Seite 46ff.)

Ist $\aleph \in \Gamma(\mathfrak{g} \otimes \wedge^1 TP)$ ein Zusammenhang des Bündels P und $u \in Aut(P)$ eine Eichtransformation, so transformiert $\aleph$ unter u mittels der Rückholung von Differentialformen:

$$u^*\aleph_V(p) = \aleph_{u_* V}(u(p))$$

für $p \in P$ und $V \in T_pP$.

Ist D ein Referenzzusammenhang und $A \in \Omega^1(adP)$, sodass man $\aleph$ mit $D + A$ identifizieren kann, und ist $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ so gewählt, dass man u mit σ identifizieren kann, so kann man $u^*\aleph$ identifizieren mit

$$D + (\sigma^* A) := D + \sigma^{-1} D\sigma + \sigma^{-1} A\sigma.$$

Für die entsprechende kovariante Ableitung auf adP bedeutet das:

$$(D + \sigma^* A)_v Y = DY + \sigma^{-1}[D_v\sigma, Y] + \sigma^{-1}[A, \sigma Y].$$

(Vgl. [Jos08], Seite 129.)

Es bleibt zu klären, warum $\sigma(x)^{-1}D_v\sigma(x) + \sigma(x)^{-1}A_v(x)\sigma(x) \in adP_x$ ist, also warum $\sigma(x)^{-1}D_v\sigma(x) \in adP_x$ ist.

Fasst man D als (aus dem selben Zusammenhang auf P wie D auf adP hervorgehende) kovariante Ableitung auf $Aut(adP)$ auf, so ist

$$\begin{aligned} D_v\sigma(x) \in T_{\sigma(x)}(P \times_c G)_x &= \sigma(x)T_{e(x)}(P \times_c G)_x = \sigma(x)(P \times_c \mathfrak{g})_x \\ &\subset \sigma(x)(adP)_x \subset Aut(adP)_x. \end{aligned}$$

Also ist $\sigma(x)^{-1}D_v\sigma(x) \in (adP)_x$.

Wie eine Eichtransformation auf einer Zusammenhangs*form* $A \in \Omega^1(adP)$ operiert, hängt also ab vom Referenzzusammenhang D, gerade weil die Operation auf dem Zusammenhang $\aleph$ von P nicht davon abhängt: Sei $\bar{D}$ ein weiterer Referenzzusammenhang und sei $\bar{A} \in \Omega^1(adP)$ eine Zusammenhangsform, sodass $\bar{D} + \bar{A} = D + A$. Dann ist

$$D + \sigma^* A = \bar{D} + \sigma^{\bar{*}}\bar{A} = \bar{D} + \sigma^{-1}\bar{D}\sigma + \sigma^{-1}\bar{A}\sigma.$$

Die Krümmung eines Zusammenhangs verhält sich unter Eichtransformationen folgendermaßen: Sei $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ eine Eichtransformation, so ist

$$F_{D+\sigma^* A} = \sigma^{-1}F_{D+A}\sigma.$$

(Siehe [Jos08], Formel (3.1.28), Seite 112.) Insbesondere ist

$$|F_{D+\sigma^* A}| = |F_{D+A}|.$$

Seien $A, B \in \Omega^1(adP)$, sodass es eine Eichtransformation $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ gibt mit

$$B = \sigma^* A.$$

Dann bezeichnet man A und B als eichäquivalent. (Tatsächlich handelt es sich um eine Äquivalenzrelation, wie man leicht nachprüfen kann.)

Sei $\{(U_i, \psi_i) : i \in I\}$ ein Bündelatlas von $(adP, \pi, M; \mathfrak{g})$. Angenommen, es gibt zu jedem $i \in I$ eine Zusammenhangsform $A_i \in \Omega^1(adP|_{U_i})$, sodass es auf jeder Schnittmenge $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ (mit $i \neq j$) eine Eichtransformation $\sigma_{ij} \in \Gamma(P \times_c G|_{U_i \cap U_j})$ gibt mit $D + \sigma_{ij}^* A_i = D + A_j$.

Dann gibt es eine Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(adP)$ und für jedes $i \in I$ eine lokale Eichtransformationen $\sigma_i \in \Gamma(P \times_c G)$, sodass $A_i = \sigma_i^* A$ auf U_i:

Seien dafür zunächst $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j \in \Omega^1(adP)$ so gewählt, dass

$$\tilde{D}_i + \tilde{A}_i = D + A_i$$

und

$$\tilde{D}_i + A_j = D + A_j.$$

auf $U_i \cap U_j$ (wobei $\tilde{D}_i$ der aus der Trivialisierung auf U_i kommende lokale Referenzzusammenhang ist).

Da Eichäquivalenz unabhängig vom gewählten Referenzzusammenhang ist, gibt es eine Eichtransformation $\tilde{\sigma}_{ij} \in \Gamma(P \times_c G|_{U_i \cap U_j})$, sodass $\tilde{D}_i + \tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{D}_i + \tilde{A}_j$.
Diese Identität trivialisieren wir, um festzustellen, dass die trivialisierten Eichtransformationen die Transformationseigenschaft lokaler Zusammenhangsformen erfüllen: Sei $Y \in \Gamma(adP|_{U_i \cap U_j})$ und $v \in \Gamma(TM|_{U_i \cap U_j})$, so ist

$$\begin{aligned}&(\psi_i)_2((\tilde{D}_i + \tilde{A}_i(x))_v Y(x)) = d_v((\psi_i)_2 \circ Y)(x) + (\psi_i)_2([(A_i)_v(x), Y(x)]) \\ &\quad = d_v((\psi_i)_2 \circ Y)(x) + [(\psi_i)_2((A_i)_v(x)), (\psi_i)_2(Y(x))],\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(\psi_i)_2((\tilde{D}_i + \tilde{A}_j(x))_v Y(x)) = (\psi_i)_2((\tilde{D}_i + \tilde{\sigma}_{ij}^* \tilde{A}_i(x))_v Y(x)) = \\ &= d_v((\psi_i)_2 \circ Y)(x) + (\psi_i)_2([\tilde{\sigma}_{ij}(x)^{-1} \tilde{D}_v \tilde{\sigma}_{ij}(x) + \tilde{\sigma}_{ij}(x)^{-1} (A_i)_v(x) \tilde{\sigma}_{ij}(x), Y(x)]) \\ &= d_v((\psi_i)_2 \circ Y)(x) + [((\psi_i^{P \times_c G})_2(\tilde{\sigma}_{ij}(x)^{-1})) d((\psi_i^{P \times_c G})_2 \circ \tilde{\sigma}_{ij})(x) \\ &\qquad + (\psi_i^{P \times_c G})_2(\tilde{\sigma}_{ij}^{-1})(\psi_i)_2((A_i)_v(x)), (\psi_i^{P \times_c G})_2(\tilde{\sigma}_{ij}(x))(\psi_i)_2(Y(x))].\end{aligned} \tag{2.1}$$

Für die lokalen Zusammenhangsformen $\bar{A}_i := (\psi_i)_2 \circ A_i$ und $\bar{A}_j := (\psi_i)_2 \circ A_j$, erhalten wir

$$\bar{A}_j = (\psi_i^{P \times_c G})_2 \circ \tilde{\sigma}_{ij}^{-1} d((\psi_i^{P \times_c G})_2 \circ \tilde{\sigma}_{ij}) + (\psi_i^{P \times_c G})_2 \circ \tilde{\sigma}_{ij}^{-1} \bar{A}_i (\psi_i^{P \times_c G})_2 \circ \tilde{\sigma}_{ij}. \tag{2.2}$$

Das entspricht der Transformationseigenschaft lokaler Zusammenhangsformen mit $g_{ij} := (\psi_i^{P \times_c G})_2 \circ \sigma_{ij}$. Somit definiert die Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ einen Zusammenhang eines Bündels $(P', \pi', M; G)$ mit Übergangsabbildungen $\{g_{ij}\}$ (und eine entsprechende kovariante Ableitung auf adP).

In der Literatur (zum Beispiel [Sed82] und [GS14]) werden daher häufig die Eichtransformationen σ_{ij} selbst als Übergangsabbildungen bezeichnet.

2.1.5 Sobolev-Räume in der Eichtheorie

Definition und Satz 2.1.18 (L^p- und Sobolev-Normen und -Räume für Schnitte). *Sei $(E, \pi, M; V)$ ein Vektorbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit m mit Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $|v|_E := \sqrt{\langle v, v \rangle}_E$ für $v \in E$. Sei $s \in \Gamma(E)$, ∇ eine kovariante Ableitung auf E, $p \in [1, \infty)$ und $k \in \mathbb{N}$.*

Dann definiert man die L^p-Norm von s folgendermaßen:

$$\|s\|_{L^p(M)} := \||s|_E\|_{L^p(M)} = \left(\int_M |s|_E^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Weiterhin definiert man die Sobolev-Normen von s als

$$\|s\|_{W^{k,p}_\nabla(M)} := \left(\sum_{j=0}^{k} \|(J^\nabla)^j s\|^p_{L^p(M)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_M |(J^\nabla)^j s|^p_E \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Dabei ist mit $(J^\nabla)^j s \in \Omega^j(E)$ die j-te totale Ableitung von s bezüglich der kovarianten Ableitung ∇ gemeint.)

Sind ∇ und ∇' zwei kovariante Ableitungen auf E, so sind die Normen $\|\cdot\|_{W^{k,p}_\nabla(M)}$ und $\|\cdot\|_{W^{k,p}_{\nabla'}(M)}$ äquivalent (siehe [Rad97], Seite 10).

Wir bezeichnen mit $L^p\Gamma(E)$ den Abschluss von $\Gamma(E)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p(M)}$ und mit $W^{k,p}\Gamma(E)$ den Abschluss von $\Gamma(E)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}_\nabla(M)}$.

$\|\cdot\|_{L^p(M)}$ lässt sich dann auf $L^p\Gamma(E)$ fortsetzen, $\|\cdot\|_{W^{k,p}_\nabla(M)}$ auf $W^{k,p}\Gamma(E)$.

$L^2\Gamma(E)$ ist ein Skalarproduktraum mit dem zur L^2-Norm gehörigen Skalarprodukt

$$(f,g)_{L^2(M)} := \int_M \langle f, g\rangle_E \, dx.$$

Analog ist auch $W^{k,2}\Gamma(E)$ ein Skalarproduktraum.

$L^p\Gamma(E)$ und $W^{k,p}\Gamma(E)$ sind Banachräume, $L^2\Gamma(E)$ und $W^{k,2}\Gamma(E)$ sogar Hilberträume.

Man kann diese Definition erweitern auf Differentialformen und somit Räume $L^p\Omega^\ell(E)$ und $W^{k,p}\Omega^\ell(E)$ definieren.

Wurde auf dem Bündel E ein Referenzzusammenhang D ausgewählt, so bezeichnet man die Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}_D(M)}$ auch mit $\|\cdot\|_{W^{k,p}(M)}$.

Sei $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ (mit $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$) ein endlicher Atlas für M (dessen Existenz ist auf Grund der Kompaktheit von M gewährleistet) und sei $\{\tau_i\}_{i\in I}$ eine Zerlegung der Eins auf M mit $supp(\tau_i) \subset U_i$. Da

$$\int_M f \, dx = \sum_{i\in I} \int_{\phi_i(U_i)} \tau_i \circ \phi_i \cdot f \circ \phi_i \sqrt{|\det((\phi_i)_* g|} \, dx,$$

lassen sich Abschätzungen für L^p- und Sobolev-Räume über beschränkten Gebieten in $\mathbb{R}^m$ auf Schnitte übertragen. Insbesondere gilt:

Satz 2.1.19 (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien $(E_1, \pi_1, M; F_1)$ und $(E_2, \pi_2, M; F_2)$ zwei Vektorbündel über derselben Mannigfaltigkeit M. Sei $f \in L^p\Gamma(E_1)$ und $g \in L^q\Gamma(E_2)$. Dann ist $f \otimes g \in L^r(E_1 \otimes E_2)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und es gilt:*

$$\|f \otimes g\|_{L^r(M)} \leqslant \|f\|_{L^p(M)} \|g\|_{L^q(M)}.$$

(Vergleiche zum Beispiel [Bre05], Théorème IV.6, Seite 56 für Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{R}^m$; die Übertragung auf Schnitte in Vektorbündeln geht direkt über die Definition der entsprechenden Normen.)

Satz 2.1.20 (Sobolev-Einbettungssatz). *Es gibt eine Einbettung*

$$W^{1,p}\Gamma(E) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}\Gamma(E) & \text{falls } p \in (1,m), \\ C^{0,\alpha}\Gamma(E) & \text{falls } p \in (m,\infty). \end{cases}$$

Dabei ist p^* definiert durch $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{m}$ und α durch $\alpha := 1 - \frac{m}{p}$.

(Siehe zum Beispiel [GT01], Seite 164 für Funktionen.)

Da in dieser Arbeit viel mit Grenzwerten von Folgen von Sobolev-Schnitten gearbeitet wird, sind weiterhin die folgenden beiden Definitionen wichtig:

Definition 2.1.21 (Schwache Konvergenz). *Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W^{k,p}\Gamma(E)$. Man sagt, Y_i konvergiere schwach in $W^{k,p}$ gegen $Y \in W^{k,p}(M)$ (in Zeichen: $Y_i \rightharpoonup Y$ in $W^{k,p}$), falls*

$$T(Y_i) \stackrel{i\to\infty}{\to} T(Y)$$

für alle beschränkten linearen Abbildungen $T : W^{k,p}(M) \to \mathbb{R}$.

Definition 2.1.22 (Schwach-Unterhalbstetigkeit). *Ein Funktional*

$$F : W^{k,p}\Gamma(E) \to \mathbb{R}$$

heißt schwach-unterhalbstetig, falls für jede Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $Y_i \stackrel{i\to\infty}{\rightharpoonup} Y$ in $W^{k,p}$ gilt:

$$\liminf_{i\to\infty} F(Y_i) \geqslant F(Y).$$

In dieser Arbeit spielen vor allem Sobolev-Zusammenhangsformen $A \in W^{k,p}\Omega^1(adP)$ und Sobolev-Eichtransformationen $\sigma \in W^{\ell,q}\Gamma(P\times_c G)$ eine Rolle. Dabei ist es wichtig, die entsprechenden Koeffizienten k, ℓ, p und q so zu definieren, dass die umgeeichte Zusammenhangsform $\sigma^*A = \sigma^{-1}D\sigma + \sigma^{-1}A\sigma$ wohldefiniert und im selben Sobolev-Raum wie A liegt. Weiterhin soll für die zugehörige Krümmung gelten: $F_{D+A} \in L^2\Omega^2(adP)$. Sonst wäre das Yang-Mills-Funktional nicht wohldefiniert.

Auf $\mathbb{R}^4$ sind $A \in W^{1,2}\Omega^1(adP)$ und $\sigma \in W^{2,2}\Gamma(P \times_c G)$ eine geeignete Wahl:

$$\begin{aligned} &\|\sigma^*A\|_{L^2(M)} \leqslant \|\sigma^{-1}D\sigma\|_{L^2(M)} + \|\sigma^{-1}A\sigma\|_{L^2(M)} \\ &\leqslant \|\sigma^{-1}\|_{L^\infty(M)}\|\sigma\|_{W^{1,2}(M)} + \|\sigma^{-1}\|_{L^\infty(M)}\|A\|_{L^2(M)}\|\sigma\|_{L^\infty(M)} \\ &\leqslant c(G)\|\sigma\|_{W^{2,2}(M)}\|A\|_{W^{1,2}(M)}. \end{aligned}$$

(Da G eine kompakte Lie-Gruppe ist, ist $|\sigma|$ fast überall auf M beschränkt, also $\|\sigma\|_{L^\infty(M)} \leqslant c(G)$.) Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&\|J^D(\sigma^* A)\|_{L^2(M)} \leqslant \|J^D(\sigma^{-1} D\sigma)\|_{L^2(M)} + \|J^D(\sigma^{-1} A\sigma)\|_{L^2(M)} \\
&\leqslant \|J^D(\sigma^{-1}) D\sigma\|_{L^2(M)} + \|\sigma^{-1} J^D(D\sigma)\|_{L^2(M)} \\
&\qquad + \|(J^D\sigma^{-1}) A\sigma\|_{L^2(M)} + \|\sigma^{-1} J^D(A)\sigma\|_{L^2(M)} + \|\sigma^{-1} A\ J^D\sigma\|_{L^2(M)} \\
&\leqslant \|J^D(\sigma^{-1})\|_{L^4(M)} \|D\sigma\|_{L^2(M)} + \|\sigma^{-1}\|_{L^\infty(M)} \|J^D(D\sigma)\|_{L^2(M)} \\
&\qquad + \|J^D\sigma^{-1}\|_{L^4(M)} \|A\|_{L^4(M)} \|\sigma\|_{L^\infty(M)} + \|\sigma^{-1}\|_{L^\infty(M)} \|J^D A\|_{L^2(M)} \|\sigma\|_{L^\infty(M)} \\
&\qquad + \|\sigma^{-1}\|_{L^\infty(M)} \|A\|_{L^4(M)} \|J^D\sigma\|_{L^4(M)} \\
&\leqslant \|\sigma^{-1}\|_{W^{2,2}(M)} \|\sigma\|_{W^{2,2}(M)} + c(G)\|\sigma\|_{W^{2,2}(M)} + c(G)\|\sigma^{-1}\|_{W^{2,2}(M)} \|A\|_{W^{1,2}(M)} \\
&\qquad + c(G)^2 \|A\|_{W^{1,2}(M)} + c(G)\|A\|_{W^{1,2}(M)} \|\sigma\|_{W^{2,2}(M)}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Dabei kann man $\|\sigma^{-1}\|_{W^{2,2}(M)}$ abschätzen gegen Normen von σ:

Es gilt

$$\|\sigma^{-1}\|_{L^2(M)} \leqslant |M| \|\sigma^{-1}\|_{L^\infty} \leqslant |M| c(G)$$

sowie

$$D\sigma^{-1} = -\sigma^{-1} D\sigma\sigma^{-1}$$

(da $0 = D(\sigma^{-1}\sigma) = (D\sigma^{-1})\sigma + \sigma^{-1}(D\sigma)$) und

$$\begin{aligned}
(J^D)^2\sigma^{-1} &= J^D(-\sigma^{-1}(J^D\sigma)\sigma^{-1}) \\
&= -(J^D\sigma^{-1})(J^D\sigma)\sigma^{-1} - \sigma^{-1}((J^D)^2\sigma)\sigma^{-1} - \sigma^{-1}(J^D\sigma)(J^D\sigma^{-1}) \\
&= \sigma^{-1}(J^D\sigma)\sigma^{-1}(J^D\sigma)\sigma^{-1} - \sigma^{-1}((J^D)^2\sigma)\sigma^{-1} + \sigma^{-1}(J^D\sigma)\sigma^{-1}(J^D\sigma)\sigma^{-1}.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\|\sigma^{-1}\|_{W^{2,2}(M)} \leqslant c(G)|M| &+ c(G)^2\|\sigma\|_{W^{2,2}(M)} + c(G)^3\|\sigma\|^2_{W^{1,4}(M)} \\
&+ c(G)^2\|\sigma\|_{W^{2,2}(M)} + c(G)^3\|\sigma\|^2_{W^{1,4}(M)}
\end{aligned}$$

mit der Hölder-Ungleichung und dem Einbettungssatz.

Demnach ist $\sigma^* A \in W^{1,2}\Omega^1(M)$, falls $A \in W^{1,2}\Omega^1(M)$ und $\sigma \in W^{2,2}\Gamma(P \times_c G)$.

Weiterhin ist dann

$$\begin{aligned}
\|F_{D+A}\|_{L^2(M)} &= \left\| DA + \frac{1}{2}[A, A] \right\|_{L^2(M)} \leqslant \|A\|_{W^{1,2}(M)} + \frac{1}{2}\|A\|_{L^4(M)}\|A\|_{L^4(M)} \\
&\leqslant \|A\|_{W^{1,2}(M)} + \frac{1}{2}\|A\|^2_{W^{1,2}(M)} < \infty.
\end{aligned}$$

Im Falle $m > 4$ erhält man analoge Abschätzungen für alle Zusammenhangsformen $A \in (W^{1,2} \cap L^4)\Omega^1(adP)$. Als gewinnbringender stellt es sich jedoch in vielen Fällen heraus, auf *Morrey-Räumen* zu arbeiten, da diese einen analogen "Sobolev-Einbettungssatz" bieten, in dem die Dimension von M keine Rolle spielt. Außerdem passen sie gut zum hier behandelten äquivarianten Ansatz, wie in Lemma 2.2.7 deutlich wird:

2.1.6 Morrey-Sobolev-Räume in der Eichtheorie

In diesem Kapitel sollen einige Grundlagen über Morrey-Räume zusammengefasst werden, welche wir in dieser Arbeit benötigen. Dabei sollte man beachten, dass die Notationen für Morrey-Räume sich in zahlreichen Arbeiten unterscheiden: insbesondere wird der Morrey-Exponent auf verschiedene Art und Weise definiert. Wir orientieren uns an der Definition aus [KJF77] und [Rad97].

Definition und Satz 2.1.23 (Morrey-Räume auf Gebieten)**.** *Sei $p \in [1, \infty)$ und $\ell \in \mathbb{R}$.*

Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet, sodass es ein $A > 0$ gibt mit

$$|G \cap B_\rho^m(x)| \geqslant A\rho^m$$

für alle $x \in \bar{G}$ und alle $\rho \in (0, \operatorname{diam}(G))$.

Mit $L_\ell^p(G)$ bezeichnen wir den Raum der Funktionen $f \in L^p(G)$, für welche die Morrey-Norm

$$\|f\|_{L_\ell^p(G)} := \left(\sup_{x \in G, \rho \in (0, \operatorname{diam}(G))} \rho^{\ell - m} \|f\|^p_{L^p(B_\rho^m(x)) \cap G} \right)^{\frac{1}{p}}$$

endlich ist.
Weiterhin definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ den Morrey-Sobolev-Raum $W_\ell^{k,p}(G)$ als den Raum der Funktionen, für welche die Morrey-Sobolev-Norm

$$\|f\|_{W_\ell^{k,p}(G)} := \left(\sum_{j=0}^{k} \|D^j f\|^p_{L_\ell^p(G)} \right)^p$$

endlich ist.

$L_\ell^2(G)$ ist ein Skalarproduktraum mit zur L_ℓ^2-Norm gehörigem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L_\ell^2(G)} := \sup_{x_0 \in G, \rho \in (0,1]} \rho^{m-\ell} \int_{G \cap B_\rho(x_0)} f \cdot g \, dx.$$

Dementsprechend ist auch $W_\ell^{k,p}(G)$ ein Skalarproduktraum.

Ersetzt man in den Definitionen der Normen bei der Supremumsbildung $\rho \in (0, 1]$ durch $\rho \in (0, c]$ mit $c > 0$, so erhält man dazu äquivalente Normen.

Diese Definition lässt sich auf Schnitte in metrischen Vektorbündeln übertragen:

Definition 2.1.24 (Morrey- und Morrey-Sobolev-Normen und -Räume für Schnitte in Vektorbündeln)**.** *Sei $(E, \pi, M; V)$ ein Vektorbündel über einer kompakten, m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Injektivitätsradius ρ_0. E sei ausgestattet mit einer Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und es sei $|v|_E := \sqrt{\langle v, v \rangle}_E$ für $v \in E$. Sei $s \in L^p\Gamma(E)$ und seien ∇ eine kovariante Ableitung auf E, $p \in [1, \infty)$, $\ell \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.*

Dann definieren wir die Morrey-Norm zum Morrey-Exponenten ℓ von s als

$$\|s\|_{L^p_\ell(M)} := \||s|_E\|_{L^p_\ell(M)} = \left(\sup_{\rho < \frac{\rho_0}{2}, x_0 \in M} \rho^{\ell - m} \||s|_E\|^p_{L^p(B_\rho(x_0))} \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\sup_{\rho < \frac{\rho_0}{2}, x_0 \in M} \rho^{\ell - m} \int_{B_\rho(0)} |s|^p_E \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Menge aller $s \in L^p\Gamma(E)$ mit $\|s\|_{W^{k,p}_\ell(M)} < \infty$ bezeichnen wir mit $L^p_\ell\Gamma(E)$.

Ist $s \in W^{k,p}\Gamma(E)$, so definieren wir die Morrey-Sobolev-Norm zum Morrey-Exponenten ℓ als

$$\|s\|_{W^{k,p}_{\ell,\nabla}(M)} := \left(\sum_{j=0}^k \|(J^\nabla)^j s\|^p_{L^p_\ell(M)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{\rho < \frac{\rho_0}{2}, x_0 \in M} \rho^{\ell - m} \sum_{j=0}^k \int_M |(J^\nabla)^j s|^p_E \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\sup_{\rho < \frac{\rho_0}{2}, x_0 \in M} \rho^{\ell - m} \|(J^\nabla)^j s\|^p_{W^{k,p}(M)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die Menge aller $s \in W^{k,p}\Gamma(E)$ mit $\|s\|_{W^{k,p}_\ell(M)} < \infty$ bezeichnen wir mit $W^{k,p}_\ell\Gamma(E)$.

(Dabei ist mit $(J^\nabla)^j s$ die j-te totale Ableitung von s bezüglich der kovarianten Ableitung ∇ gemeint.)

Sei $G \subset M$ ein Gebiet. Mit $L^p_\ell\Gamma(G)$ bezeichnen wir den Raum der Schnitte $s \in L^p\Gamma(E|_G)$, für die die Morrey-Norm

$$\|s\|_{L^p_\ell(G)} := \left(\sup_{x \in G, \rho \in (0, \frac{\rho_0}{2})} \rho^{m - \ell} \|f\|^p_{L^p(B_\rho(x) \cap G)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

endlich ist.

Wir definieren für jedes $k \in \mathbb{N}$ den Morrey-Sobolev-Raum $W^{k,p}_\ell\Gamma(E|_G)$ als den Raum der Funktionen, für welche die Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}_\ell(G)} := \left(\sup_{\rho < \frac{\rho_0}{2}, x_0 \in M} \rho^{\ell - m} \|(J^\nabla)^j s\|^p_{W^{k,p}(G)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

endlich ist.

Ersetzt man in den Definitionen der Normen bei der Supremumsbildung $\rho \in (0, \frac{\rho_0}{2}]$ *durch* $\rho \in (0, c]$ *mit* $0 < c \leqslant \frac{\rho_0}{2}$*, so erhält man dazu äquivalente Normen.*

Wurde auf dem Bündel E ein Referenzzusammenhang D ausgewählt, so bezeichnet man die Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}_{\ell,D}(M)}$ auch mit $\|\cdot\|_{W^{k,p}_{\ell}(M)}$.

Sind ∇ und ∇' zwei kovariante Ableitungen auf E, so sind die Normen $\|\cdot\|_{W^{k,p}_{\ell,\nabla}(M)}$ und $\|\cdot\|_{W^{k,p}_{\ell,\nabla'}(M)}$ äquivalent. (Das kann man unmittelbar aus der entsprechenden Aussage über Sobolev-Normen ableiten.)

Morrey- beziehungsweise Morrey-Sobolev-Schnitte mit Morrey-Exponenten ℓ über m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie L^p- beziehungsweise Sobolev-Schnitte über ℓ-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Insbesondere gelten die folgenden Sätze:

Satz 2.1.25 (Zusammenhang mit Sobolev-Räumen)**.**

$$W^{k,p}_{\ell}\Gamma(E) \subset \begin{cases} \{0\} & \text{für } \ell < 0, \\ W^{k,\infty}\Gamma(E) & \text{für } \ell = 0, \\ W^{k,p}\Gamma(E) & \text{für } \ell > 0. \end{cases}$$

(Siehe [Gia83], Proposition 1.1, Seite 66 für Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{R}^m$. Die Übertragung auf Schnitte in Vektorbündeln funktioniert unmittelbar mit der Definition der entsprechenden Normen.)

Satz 2.1.26 (Banach-Räume)**.** *Alle hier eingeführten Morrey-Räume und Morrey-Sobolev-Räume sind Banach-Räume.*

(Siehe [KJF77], Seite 217 für Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{R}^m$.)

Satz 2.1.27 (Hölder-Ungleichung für Morrey-Räume)**.** *Seien* $(E_1, \pi_1, M; F_1)$ *und* $(E_2, \pi_2, M; F_2)$ *Vektorbündel über derselben Mannigfaltigkeit* M*. Sei* $f \in L^p_\ell\Gamma(E_1)$ *und* $g \in L^q_\ell\Gamma(E_2)$*. Dann ist* $f \otimes g \in L^r_\ell(E_1 \otimes E_2)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ *und es gilt:*

$$\|f \otimes g\|_{L^r_\ell(M)} \leqslant \|f\|_{L^r_\ell(M)} \|g\|_{L^q_\ell(M)}.$$

Beweis. Das folgt direkt aus der Hölder-Ungleichung für L^p-Räume (Satz 2.1.19):

$$\begin{aligned}
\|f\otimes g\|_{L^r_\ell(M)} &= \left(\sup_{\rho\in(0,\frac{\rho_0}{2}),x\in M} \rho^{\ell-m}\|(f,g)\|^r_{L^r(B_\rho(x))}\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leqslant \sup_{\rho\in(0,\frac{\rho_0}{2}),x\in M}\left(\rho^{\frac{\ell-m}{r}}\|f\|_{L^p(B_\rho(x))}\|g\|_{L^q(B_\rho(x))}\right)\\
&= \sup_{\rho\in(0,\frac{\rho_0}{2}),x\in M}\rho^{(\ell-m)(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\|f\|_{L^p(B_\rho(x))}\|g\|_{L^q(B_\rho(x))}\\
&\leqslant \left(\sup_{\rho\in(0,\frac{\ell}{2}),x\in M}\rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_\rho(x))}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sup_{\rho\in(0,1],x\in M}\rho^{\ell-m}\|g\|^q_{L^q(B_\rho(x))}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \|f\|_{L^p_\ell(M)}\|g\|_{L^q_\ell(M)}.
\end{aligned}$$

□

Satz 2.1.28 (Morrey-Sobolev-Einbettungssatz)**.** *Sei $\ell\in(0,m)$. Dann gibt es eine Einbettung*

$$W^{1,p}_\ell\Gamma(E)\hookrightarrow\begin{cases} L^{p^*}_\ell\Gamma(E) & \text{falls } p\in(1,\ell),\\ C^{0,\alpha}\Gamma(E) & \text{falls } p\in(\ell,\infty).\end{cases}$$

Dabei ist p^* definiert durch $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\ell}$ und $\alpha=1-\frac{\ell}{p}$.

(Siehe [Ada75], Theorem 3.2, Seite 769 und [GT01], Theorem 7.19, Seite 165 für Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{R}^m$; die Übertragung auf Vektorbündel geht direkt über die Definition der entsprechenden Normen.)

Völlig analog zu Rechnung (2.3) kann man zeigen, dass $W^{1,2}_4\Omega^1(adP)$ ein geeigneter Raum für Zusammenhangsformen und $W^{2,2}_4\Gamma(P\times_c G)$ ein geeigneter Raum für Eichtransformationen: so ist gewährleistet, dass $F_{D+A}\in L^2(M)$ ist und σ^*A für jede Eichtransformation σ in demselben Raum wie A liegt.

Ein wesentlicher Unterschied zu L^p- beziehungsweise Sobolev-Räumen besteht jedoch darin, dass im Allgemeinen $\Gamma(E)$ weder in $L^p_\ell\Gamma(E)$ noch in $W^{k,p}_\ell\Gamma(E)$ liegt.

2.1.7 Das Yang-Mills-Funktional

Definition 2.1.29 (Yang-Mills-Funktional)**.** *Sei $(P,\pi,M;G)$ ein Prinzipalfaserbündel und sei $(E,\pi',M;V)$ ein zu P assoziiertes Vektorbündel. Sei D ein fixierter Referenzzusammenhang von P. Das Yang-Mills-Funktional* YM *zu E ist definiert als*

$$\mathrm{YM}:\begin{cases} D+(W^{1,2}\cap L^4)\Omega^1(adP)\to\mathbb{R},\\ \qquad\qquad D+A\mapsto\displaystyle\int_M |F_{D+A}|^2_{adP}\,dx;\end{cases}$$

also als das Funktional, welches jeder kovarianten Ableitung auf E die quadratische L^2-Norm seiner Krümmung zuordnet.

Lemma 2.1.30 (Euler-Lagrange-Gleichung zu YM)**.** *Genau dann ist eine Zusammenhangsform $A \in (W^{1,2} \cap L^4)\Omega^1(adP)$ ein kritischer Punkt von* YM *auf M, wenn für jede Testform $\varphi \in \Omega^1(adP)$ gilt:*

$$((D+A)\phi, F_{D+A})_{L^2(M)} = 0.$$

Ist $U \subset M$, so ist $A \in W^{1,2}\Omega^1(adP|_U)$ genau dann ein kritischer Punkt von YM *auf U, wenn für jede Testform $\varphi \in \Omega^1_0(adP|_U)$ (also für jede glatte* 1*-Form auf U mit kompaktem Träger in U) gilt:*

$$((D+A)\phi, F_{D+A})_{L^2(U)} = 0.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \Omega^1(adP)$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $Y \in \Gamma(E)$

$$\begin{aligned} &F_{D+A+t\varphi}Y = (D+A+t\varphi)((D+A)\sigma + t\varphi)Y \\ &= F_{D+A}Y + (D+A)(t\varphi Y) + t\varphi(D+A)Y + t^2([\varphi,\varphi])Y \\ &= (F_{D+A} + t(D+A)\varphi + t^2[\varphi,\varphi])Y. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathrm{YM}(D+A+t\varphi)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_M \langle F_{A+t\varphi}, F_{A+t\varphi}\rangle_{adP\otimes\wedge^2TM}\,dx|_{t=0} \\ &= 2\int_M \langle (D+A)\varphi, F_{D+A}\rangle_{adP\otimes\wedge^2TM}\,dx = ((D+A)\varphi, F_{D+A})_{L^2(M)}. \end{aligned}$$

Die Rechnung für $U \subset M$ geht völlig analog. □

Die Euler-Lagrange-Gleichung zu YM wird im Folgenden auch als Yang-Mills-Gleichung oder YM-Gleichung bezeichnet; Zusammenhangsformen, die diese lösen, werden als Yang-Mills-Zusammenhangsformen oder YM-Zusammenhangsformen bezeichnet.

Offensichtlich ist YM invariant unter Eichtransformationen: Wie bereits gesehen, ist

$$F_{D+\sigma^*A} = \sigma^{-1}F_{D+A}\sigma$$

für alle Eichtransformationen $\sigma \in \Gamma(P\times_c G)$. Die Bündelmetrik auf adP ist G-invariant (und somit auch invariant unter der Anwendung von Eichtransformationen); daher erhält man:

$$|F_{D+\sigma^*A}| = |F_{D+A}|$$

und somit

$$\mathrm{YM}(D+\sigma^*A) = \mathrm{YM}(D+A).$$

Daraus folgt automatisch auch, dass die Euler-Lagrange-Gleichung zu YM eichinvariant ist.

In dieser Arbeit soll das Yang-Mills-Funktional mit Hilfe der "direkten Methode der Variationsrechnung" analysiert werden: Grundsätzlich bedeutet das, dass eine Minimalfolge zu diesem Funktional ausgewählt wird, von der dann gezeigt wird, dass sie eine schwach konvergente Teilfolge besitzt. Ist das Funktional schwach unterhalbstetig, so ist der Grenzwert dieser konvergenten Teilfolge ein Minimierer.

Um die Existenz einer solchen konvergenten Teilfolge zu zeigen, verwendet man in der Regel die Koerzivität des betrachteten Funktionals. Leider folgt aus der Eichinvarianz des Yang-Mills-Funktionals auch, dass es im Allgemeinen nicht konvex und nicht koerziv ist. Auf Grund der Nicht-Konvexität ist nötig, lokal eine geeignete Eichung zu fixieren, in welcher YM koerziv wird. Dies gelang erstmals Uhlenbeck in [Uhl82a] für Basismannigfaltigkeiten, deren Dimension höchstens 4 ist. Der in dieser Arbeit benötigte Eichsatz (Satz 4.0.2) wird in Abschnitt 4 bewiesen.

Das Yang-Mills-Funktional ist schwach unterhalbstetig im folgenden Sinne:

Lemma 2.1.31 (Schwach-Unterhalbstetigkeit von YM). *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine in Folge von Zusammenhangsformen in $(W^{1,2}\cap L^4)\Omega^1(adP)$, die schwach in $W^{1,2}$ und in L^4 gegen $A\in(W^{1,2}\cap L^4)\Omega^1(E)$ konvergiert.*

Dann gibt es eine Teilfolge $(A_{i(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass

$$[A_{i(k)},A_{i(k)}]\rightharpoonup[A,A]$$

schwach in L^2. Für diese Teilfolge gilt:

$$\mathrm{YM}(D+A)\leqslant\liminf_{k\to\infty}\mathrm{YM}(D+A_{i(k)}).$$

Beweis.

$$\|[A_i,A_i]\|_{L^2(M)}\leqslant\|A_i\|^2_{L^4(M)}\leqslant C$$

(da $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent und somit beschränkt in L^4 ist). Da L^2 ein reflexiver Banachraum ist, folgt daraus (siehe zum Beispiel [Bre05], Seite 50, Théorème III.27), dass $([A_i,A_i]_{i\in\mathbb{N}}$ eine in L^2 schwach konvergente Teilfolge $([A_{i(k)},A_{i(k)}])_{k\in\mathbb{N}}$ hat.
Der schwache Grenzwert von $([A_{i(k)},A_{i(k)}])_{k\in\mathbb{N}}$ muss mit $[A,A]$ übereinstimmen, da die schwache Konvergenz $A_i\rightharpoonup A$ in $W^{1,2}\Omega^1(adP)$ fast überall auf M punktweise Konvergenz einer Teilfolge von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ impliziert.

Für diese Teilfolge gilt dann:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{YM}(D + A_{i(k)}) - \mathrm{YM}(D + A) = \int_M \left(|F_{D+A_i}|^2 - |F_{D+A}|^2\right)\, dx \\
&= \int_M |F_{D+A_{i(k)}} - F_{D+A}|^2\, dx + 2\int_M \langle F_{D+A_{i(k)}} - F_{D+A}, F_{D+A}\rangle\, dx \\
&\geqslant 2\int_M \langle F_{D+A_{i(k)}} - F_{D+A}, F_{D+A}\rangle\, dx \\
&= \int_M \langle (DA_{i(k)} + \frac{1}{2}[A_{i(k)}, A_{i(k)}] - DA - \frac{1}{2}[A, A]), F_{D+A}\rangle\, dx \\
&= \int_M \langle (DA_{i(k)} - DA), F_{D+A}\rangle\, dx + \int_M \langle \frac{1}{2}([A_{i(k)}, A_{i(k)}] - [A, A]), F_{D+A}\rangle\, dx \\
&\overset{k\to\infty}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

Dabei geht beim Grenzübergang $k \to \infty$ der Term $\int_M \langle (DA_{i(k)} - DA), F_{D+A}\rangle\, dx$ offensichtlich gegen 0 (wegen der schwachen Konvergenz $A_i \rightharpoonup A$ in $W^{1,2}\Omega^1(adP)$). $\int_M \langle ([A_i, A_i] - [A, A]), F_{D+A}\rangle\, dx$ geht gegen 0, da $[A_{i(k)}, A_{i(k)}] \rightharpoonup [A, A]$ schwach in L^2. □

2.2 Gruppenoperationen und Symmetrien

2.2.1 Allgemeines zu kompakten Transformationsgruppen

Definition 2.2.1 (Transformationsgruppen)**.** *Ein Paar (M, K) bezeichnet man als Liesche Transformationsgruppe, wenn gilt:*

- *M ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (möglicherweise mit Rand),*
- *K ist eine Lie-Gruppe und*
- *K operiert differenzierbar auf M.*

(M, K) heißt kompakt, wenn sowohl M als auch K kompakt ist.

(Vergleiche [Gas96].)

Weiterhin wird in dieser Arbeit (und insbesondere in diesem Abschnitt) vorausgesetzt, dass K isometrisch auf M operiert: Für alle $k \in K$ und alle $x, y \in M$ soll also gelten:

$$\operatorname*{dist}_M(kx, ky) = \operatorname*{dist}_M(x, y).$$

Für $x \in M$ definiert man den Orbit

$$Kx := \{kx : k \in K\}$$

und die Isotropiegruppe

$$K_x := \{k \in K : kx = x\}.$$

Jeder Orbit Kx einer kompakten Transformationsgruppe (M, K) ist eine kompakte Untermannigfaltigkeit von M. Daher ist die Dimension eines Orbits wohldefiniert; man bezeichnet $\max\{\dim(Kx) : x \in M\}$ als Homogenität der K-Operation auf M,

$$\ell := \dim(M) - \max\{\dim(Kx) : x \in M\}$$

als Kohomogenität der K-Operation auf M. In dieser Arbeit werden kompakte Transformationsgruppen (M, K) betrachtet, deren Kohomogenität $\ell \leqslant 4$ ist.

Weiterhin beschränkt sich diese Arbeit auf Transformationsgruppen, bei denen die K-Operation auf M isometrisch ist, also $\mathrm{dist}_M(kx, ky) = \mathrm{dist}_M(x, y)$ für alle $x, y \in M$ und alle $k \in K$.

Weiterhin ist wegen der Untermannigfaltigkeitseigenschaft von Kx das Normalenbündel $(\nu(Kx), \pi, Kx; \mathbb{R}^{\dim(Kx)})$ an Kx wohldefiniert (und ein Unterbündel von TM).

Auf TM operiert K auf natürliche Weise durch Differentiale: Jedes $k \in K$ definiert eine Abbildung $k : M \to M$, für deren Ableitung $dk(x) : T_xM \to T_{kx}M$ gilt. Diese Abbildung wird hier abgekürzt mit $k_*v := dk(x)_v$ für $v \in T_xM$.

Die Isotropiegruppe K_x ist für jedes $x \in M$ eine Untergruppe von K. Ist $y = \kappa x$ (mit $\kappa \in K$), so ist $K_y = \kappa K_x \kappa^{-1}$.

Wenn K_x konjugiert ist zu einer Untergruppe H von K (wenn es also ein $\kappa \in K$ gibt, sodass $K_x = \kappa^{-1} H \kappa$), dann bezeichnet man (H) als den Isotropietyp von x. In Analogie zu [Gas96] werden hier die folgenden beiden Abkürzungen verwendet:

$$M(H) := \{x \in M : x \text{ ist vom Isotropietyp } H\}$$

und

$$M(\leqslant H) := \{x \in M : K_x \text{ ist konjugiert zu einer Untergruppe von } H\}.$$

Orbits, die denselben Isotropietyp haben, haben dieselbe Dimension.

Weiterhin definiert man die Schlauchumgebung eines Orbits als

$$T^r(Kx) := \{y \in M \, : \, \operatorname*{dist}_M(y, Kx) < r\}$$

(für $x \in M$ und $r > 0$).

Eine wichtige Grundlage dieser Arbeit ist das folgende Resultat:

Satz 2.2.2 (Scheibensatz). *Sei (M, K) eine kompakte Transformationsgruppe, sodass die K-Operation auf M isometrisch ist. Sei $x \in M$. Dann bildet die Exponentialabbildung ein kleines Scheibenbündel*

$$\nu^r(Kx) := \{v \in \nu(Kx) : |v|_\gamma < r\} \subset \nu(Kx)$$

(mit $r > 0$) K-äquivariant und diffeomorph auf die Schlauchumgebung $T^r(Kx)$ ab. Für $\exp|_{\nu^r(Kx)}$ gilt also:

$$\exp|_{\nu^r(Kx)} : \nu^r(Kx) \to T^r(Kx)$$

sowie

$$\exp(k_* n(a)) = k \exp(n(a))$$

für alle $k \in K$, alle $a \in Kx$ und alle $n(a) \in \nu_a(Kx)$.

(Siehe [Kaw91], Theorem 4.10, Seite 184; zitiert nach [Gas96], Satz 1.3., Seite 13.)

Daraus kann man folgern:

Definition und Satz 2.2.3 (Orbittypen). *Sei (M, K) eine kompakte Transformationsgruppe. Dann gibt es nur endlich viele Isotropietypen (H_i). Es gibt einen minimalen Isotropietyp $(H_{\min})$, sodass jedes es in jedem H_i eine Untergruppe gibt, zu der $H_{\min}$ konjugiert ist.*
Orbits vom Isotropietyp $(H_{\min})$ bezeichnet man als Hauptorbits. Einen Orbit mit einem anderen Isotropietyp nennt man Ausnahmeorbit, falls er dieselbe Dimension wie die Hauptorbits hat. Ansonsten bezeichnet man ihn als singulären Orbit.
Die Vereinigung aller Hauptorbits ist eine offene und dichte Teilmenge von M.

(Siehe [Kaw91], Theorem 4.23 (Seite 213) und Theorem 4.27 Seite 216.)

Wir benötigen weiterhin eine Abschätzung dafür, wie groß man den Radius der Schlauchumgebung beziehungsweise des Scheibenbündels im Scheibensatz wählen kann:

Satz 2.2.4 (Abschätzung der Scheibengröße). *Unter den Voraussetzungen des Scheibensatzes (Satz 2.2.2 gibt es eine Konstante $C(M, K) < 1$, sodass für jedes $x \in M$, $r > 0$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ mit*

$$r \leqslant C(M, K)\varepsilon \operatorname{dist}(x, M(>K_x))$$

(oder $r \leqslant C(M, K)\varepsilon$ im Fall $M(>K_x) = \emptyset$) gilt:

$$\operatorname{BiLip}(\exp|_{\nu^r(Kx)}) := \max\{\operatorname{Lip}(\exp|_{\nu^r(Kx)}), \operatorname{Lip}(\exp^{-1}|_{T^r(Kx)})\} < 1 + \varepsilon$$

(wobei Lip die jeweils optimale Lipschitz-Konstante bezeichnen soll).

(Siehe [Gas96], Satz 1.8, Seite 14f.)

Sei $U \subset Kx_0$. Dann bezeichnen wir $T^r(Kx_0)|_U := \exp(\nu^r(Kx_0)|_U)$.

Eine Anwendung des Scheibensatzes in dieser Arbeit liegt darin, lokale Parametrisierungen von M zu konstruieren, die zur K-Operation passen:

Korollar 2.2.5 (Existenz einer “orbittreuen” lokalen Parametrisierung)**.** *Sei ℓ die Kohomogenität der K-Operation auf M, $\lambda \in \{0, \dots, \ell\}$.*

Sei $x_0 \in M$, sodass $\dim(Kx_0) = m - \lambda$, und sei $r \leqslant C(M,K)\varepsilon \operatorname{dist}(x_0, M(>K_{x_0}))$ wie in Satz 2.2.4. Dann gibt es ein $\rho > 0$ und eine lokale Parametrisierung

$$\phi : \mathbb{R}^m \supset B_\rho^{m-\lambda}(0) \times B_r^\lambda(0) \to T^r(Kx_0)|_{B_\rho^{Kx_0}(x_0)},$$

sodass gilt:

- $\phi^{-1}(Kx_0) \subset \mathbb{R}^{m-\ell} \times \{0\}$;
- *für jedes $z \in Kx_0$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}^{m-\ell}$, sodass $\phi^{-1}(S_z^r) \subset \{a\} \times \mathbb{R}^\ell$;*
- $\operatorname{BiLip}(\phi) \leqslant 2(1+\varepsilon)$ *und*
- *für jedes $z \in Kx_0$, $x, y \in S_z^r$ und $\kappa \in K_z$ ist*

$$\langle \phi^{-1}(\kappa x), \phi^{-1}(\kappa y)\rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)\rangle_{\mathbb{R}^m}.$$

Beweis. Laut dem Scheibensatz (Satz 2.2.2) ist $\exp : \nu^r(Kx_0) \to T^r(Kx_0)$ ein K-äquivarianter Diffeomorphismus und bildet daher K-Orbits in $T^r(Kx_0)$ ab auf K-Orbits in $\nu^r(Kx_0)$.

Da K isometrisch auf M operiert, ist auch die K-Operation auf TM isometrisch und somit insbesondere die von K_{x_0} auf $\nu(Kx_0)$. Demnach ist

$$\langle \exp^{-1}(\kappa x), \exp^{-1}(\kappa y)\rangle_{TM} = \langle \exp^{-1}(x), \exp^{-1}(y)\rangle_{TM}$$

für alle $z \in Kx_0$, $x, y \in S_z^r$ und $\kappa \in K_z$.
Dabei ist $\operatorname{BiLip}(\exp|_{\nu^r(Kx_0)}) \leqslant 1 + \varepsilon$.

Weiterhin gibt es (da $\nu(Kx_0)$ ein Vektorbündel ist) eine lokale Trivialisierung von $\nu(Kx_0)$ um x_0; es gibt also ein $\rho > 0$ und einen Diffeomorphismus

$$\psi : \nu(Kx_0)|_{B_\rho^{Kx_0}(x_0)} \to B_\rho^{Kx_0}(x_0) \times \mathbb{R}^\lambda.$$

Wir benötigen eine lokale Trivialisierung $\tilde{\psi}$, für welche die lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}_2|_{\nu_x(Kx_0)} : \nu_x(Kx_0) \to \mathbb{R}^\ell$$

für jedes $x \in B_\rho^{Kx_0}(x_0)$ eine Isometrie ist, dass also gilt:

$$\langle \tilde{\psi}_2(v), \tilde{\psi}_2(w) \rangle_{\mathbb{R}^\ell} = \langle v, w \rangle_{TM}$$

für alle $v, w \in \nu_x(Kx_0)$. Dafür wählen wir ρ hinreichend klein, dass es einen Orthonormalrahmen $\{e_i(x)\}_{i=1}^\ell$ auf $B_\rho^{Kx_0}(x_0)$ gibt. In dieser Orthonormalbasis können wir $\psi_2|_{\nu_x(Kx_0)}$ als Matrix $B(x) \in GL(\mathbb{R}^\ell)$ schreiben. Dann ist $\tilde{\psi}_2(x, \cdot) := B(x)^{-1}\psi_2(x, \cdot)$ ebenfalls eine lokale Trivialisierung von $\nu(Kx_0)|_{B_\rho^{Kx_0}(x_0)}$, welche eine Isometrie ist.

Da K isometrisch auf M wirkt, ist dann auch

$$\langle \tilde{\psi}_2 \circ \exp^{-1}(\kappa x), \tilde{\psi}_2 \circ \exp^{-1}(\kappa y) \rangle_{\mathbb{R}^\ell} = \langle \tilde{\psi}_2 \circ \exp^{-1}(x), \tilde{\psi}_2 \circ \exp^{-1}(y) \rangle_{\mathbb{R}^\ell}$$

für alle $z \in Kx_0$, $x, y \in S_z^r$ und $\kappa \in K_z$.

Kx_0 ist eine Mannigfaltigkeit. Demnach gibt es eine lokale Parametrisierung von Kx_0 um x_0; es gibt also ein $\rho > 0$ und einen Diffeomorphismus

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{m-\lambda} \supset B_\rho^{m-\lambda}(0) \to B_\rho^{Kx_0}(x_0) \subset Kx_0.$$

mit Bi-Lipschitzkonstante $\mathrm{BiLip}(\tilde{\phi}) \leqslant 2$
Dann ist

$$\phi := \exp \circ \psi^{-1} \circ (\tilde{\phi} \otimes id_{\mathbb{R}^\lambda}) : \mathbb{R}^m \supset U \times B_r^\lambda(0) \to T^r(Kx_0)|_{B_\rho^{Kx_0}(x_0)}.$$

eine lokale Trivialisierung von $T^r(Kx_0)|_{B_\rho^{Kx_0}}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

□

Im Zusammenhang mit äquivarianten Schnitten ist die folgende Definition der Morrey-Norm praktisch, die auf kompakten Transformationsgruppen äquivalent zur herkömmlichen Morrey-Norm ist:

Lemma 2.2.6 (äquivalente Morrey-Norm auf kompakten Transformationsgruppen)**.** *Sei (M, K) eine kompakte Transformationsgruppe und seien $x_0 \in M$ und $\delta > 0$, sodass* $\mathrm{dist}(x_0, M(>K_{x_0})) > 2\delta > 0$. *Definiere*

$$\bar{\rho}(\delta) := \frac{1}{2} \min \left\{ \delta, \frac{\rho_0}{C(M.K)} \right\}$$

mit der Konstanten $C(M, K)$ aus Satz 2.2.4.

Dann wird durch

$$\|f\|_{L_\ell^p(T^\delta(Kx_0),K)} := \left(\sup_{x \in T^\delta(Kx_0), \rho \in (0, \bar{\rho}(\delta)],} \rho^{\ell - m} \|f\|^p_{L^p(Q_\rho(x) \cap T^\delta(Kx_0))} \right)^{\frac{1}{p}}$$

(für $f \in L^p(T^\delta(Kx_0), K)$) eine zu $\|\cdot\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))}$ äquivalente Norm definiert:

es gibt Konstanten $\bar{c}(M, K, \delta)$ und $\bar{C}(M, K)$, sodass

$$\bar{c}(M, K, \delta)\|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))} \leqslant \|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0),K)} \leqslant \bar{C}(M, K)\|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))}$$

für alle $f \in L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))$.

Beweis. Laut Korollar 2.2.5 gibt es eine lokale Parametrisierung ϕ von $T^\delta(Kx_0)$ um x_0 mit

$$\mathrm{BiLip}(\phi) \leqslant 2(1 + \varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon \geqslant \frac{\delta}{C(M,K)\,\mathrm{dist}(x_0, M(>K_{x_0}))}$.

Da nach Voraussetzung $\mathrm{dist}(x_0, M(>K_{x_0})) > 2\delta > 0$ gilt, kann man

$$\varepsilon := \frac{\delta}{C(M, K)2\delta} = \frac{1}{2C(M, K)}$$

wählen und erhält

$$\mathrm{BiLip}(\phi) \leqslant 2 + \frac{1}{C(M, K)}$$

mit der Konstante $C(M, K)$ aus Satz 2.2.4.

Daher existieren $\mu(\delta), \nu(\delta) > 0$, sodass für alle $x \in M$ und alle $\rho \in]0, \bar{\rho}(\delta)]$ gilt: $B_{\mu\rho}(x) \subset Q_\rho(x) \subset B_{\nu\rho}(x)$: Man kann $\mu := \frac{1}{\left(2+\frac{1}{C(M,K)}\right)^2}$ und $\nu := \left(2 + \frac{1}{C(M,K)}\right)^2$ wählen.

Für alle $f \in L^p(T^\delta(Kx_0))$, $x \in T^\delta(Kx_0)$ und $\rho \in (0, \bar{\rho}(\delta)]$ gilt dann:

$$\rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_{\mu\rho}(x)\cap T^\delta(Kx_0))} \leqslant \rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(Q_\rho(x)\cap T^\delta(Kx_0))} \leqslant \rho^{\ell-m}\|f\|_{L^p(B_{\nu\rho}(x)\cap T^\delta(Kx_0))}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0),K)} &= \sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in(0,\bar{\rho}(\delta)],} \rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(Q_\rho(x)\cap T^\delta(Kx_0))} \\
&\leqslant \sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in(0,\bar{\rho}(\delta)]} \rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_{\nu\rho}(x)\cap T^\delta(Kx_0))} \\
&= \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m} \sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in(0,\bar{\rho}(\delta)]} (\nu\rho)^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_{\nu\rho}(x)\cap T^\delta(Kx_0))} \\
&= \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m} \sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in(0,\nu\bar{\rho}(\delta)]} \rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_\rho(x))} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m} \sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in(0,\frac{\rho_0}{2}]} \rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_\rho(x))} \\
&= \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m} \|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))}.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))} = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m}\sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in]0,\frac{\rho_0}{2}]}\rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_\rho(x)\cap T^\delta(Kx_0))}\\
&\leqslant \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m} c(\delta,\rho_0)\sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in]0,\mu\bar\rho(\delta)]}\rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_\rho(x)\cap T^\delta(Kx_0))}\\
&= c(\delta,\rho_0)\sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in]0,\bar\rho(\delta)]}\rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(B_{\mu\rho}(x)\cap T^\delta(Kx_0))}\\
&\leqslant c(\delta,\rho_0)\sup_{x\in T^\delta(Kx_0),\rho\in]0,\bar\rho(\delta)]}\rho^{\ell-m}\|f\|^p_{L^p(Q_\rho(x)\cap T^\delta(Kx_0))}\\
&= c(\delta,\rho_0)\|f\|^p_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0),K)}.
\end{aligned}$$

Und demnach:

$$\bar c(M,K,\delta)\|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))} \leqslant \|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0),K)} \leqslant \bar C(M,K)\|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))}$$

mit $\bar c(M,K,\delta) := \frac{1}{c(\delta,\rho_0)}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m}$ und $\bar C(M,K) := \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\ell-m}$. □

Damit kann man ein Resultat aus [Rad97] (Lemma 3.1, Seite 9) nachrechnen und etwas erweitern:

Lemma 2.2.7 (Invarianz und Morrey-Abschätzungen)**.** *Sei (M,K) eine kompakte Transformationsgruppe und sei $x_0 \in M$ mit $\dim(Kx_0) \geqslant m-\ell$. Sei $\delta > 0$, sodass $\operatorname{dist}(x_0, M(>K_{x_0})) > 2\delta > 0$. Sei $f \in L^p(T^\delta(Kx_0))$ eine K-invariante Funktion. Dann ist $f \in L^p_\ell(T^\delta(Kx_0),\mathbb{R})$ mit*

$$\|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))} \leqslant c(M,K,\delta,\ell)\|f\|_{L^p(T^\delta(Kx_0))}.$$

Definiert man

$$M^\ell_{2\delta} := M \setminus \left(\bigcup_{\dim(Ky)<m-\ell} T^{2\delta}(Ky)\right),$$

so erhält man auch für $f \in L^p(M)$

$$\|f\|_{L^p_\ell(M^\ell_{2\delta})} \leqslant c(M,K,\delta,\ell)\|f\|_{L^p(M)}.$$

Beweis. Arbeite mit der äquivalenten Morrey-Norm aus Lemma 2.2.6, der orbittreuen Parametrisierung von M aus Korollar 2.2.5 und der Koflächenformel. Definiere dafür wie in Lemma 2.2.6 $\bar\rho(\delta) := \frac{1}{2}\min\left\{\delta, \frac{\rho_0}{C(M.K)}\right\}$. Definiere weiterhin $\bar f \in L^p(M)$ durch $\bar f|_{T^\delta(Kx_0)} = f$, $f|_{M\setminus T^\delta(Kx_0)} = 0$. Dann ist auch $\bar f$ eine K-invariante Funktion.

Die Koflächenformel wollen wir bezüglich der Projektion $g : T^\delta(Kx_0) \to Kx_0$ auf den Mittelorbit entlang der Scheiben arbeiten. Dafür benötigen wir eine Abschätzung für deren normale Jacobische:

$$
\begin{aligned}
|J_g(x)| &\leqslant \operatorname{Lip}(g)^m = \operatorname{Lip}((g \circ \phi) \circ \phi^{-1})^m \leqslant \operatorname{Lip}(g \circ \phi)^m \operatorname{Lip}(\phi^{-1})^m = \operatorname{Lip}(\phi^{-1})^m \\
&\leqslant \operatorname{BiLip}(\phi)^m = \left(2 + \frac{1}{C(M,K)}\right)^m = c(M,K),
\end{aligned}
$$

wie im Beweis von Lemma 2.2.6 gesehen.

Damit erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\|f\|^p_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0))} \leqslant \frac{1}{\bar{c}(M,K,\delta)} \|f\|^p_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_0),K)} \\
&\leqslant \frac{1}{\bar{c}(M,K,\delta)} \sup_{x \in T^\delta(Kx_0), \rho \in (0,\bar{\rho}(\delta)]} \rho^{\ell-m} \int_{Q_\rho(x) \cap T^\delta(Kx_0)} |f(t)|^p \, dt \\
&= \frac{1}{\bar{c}(M,K,\delta)} \sup_{x \in T^\delta(Kx_0), \rho \in (0,\bar{\rho}(\delta)]} \rho^{\ell-m} \int_{Q_\rho(x)} |\bar{f}(t)|^p \, dt \\
&\leqslant c(M,K) \frac{1}{\bar{c}(M,K,\delta)} \sup_{x \in T^\delta(Kx_0), \rho \in (0,\bar{\rho}(\delta)]} \rho^{\ell-m} \int_{B^{Kx}_\rho(x)} \int_{S^\rho_z} |\bar{f}(t)|^p \, dt \, dz \\
&= c(M,K) \frac{1}{\bar{c}(M,K,\delta)} \sup_{x \in T^\delta(Kx_0), \rho \in (0,\bar{\rho}(\delta)]} \rho^{\ell-m} |B^{Kx}_\rho(x)| \int_{S^\rho_x} |\bar{f}(t)|^p \, dt \\
&\leqslant c(M,K,\delta,\ell) \sup_{x \in T^r(Kx_0), \rho \in (0,\bar{\rho}(\delta)]} \int_{S^\rho_x} |\bar{f}(t)|^p \, dt \\
&\leqslant c(M,K,\delta,\ell) \sup_{x \in T^r(Kx_0), \rho \in (0,\bar{\rho}(\delta)]} \frac{1}{\mathcal{H}^{m-\ell}(Kx)} \int_{T^\rho(Kx)} |f(t)|^p \, dt \\
&\leqslant c(M,K,\delta,\ell) \int_{T^\delta(Kx_0)} |f(t)|^p \, dt \\
&= c(M,K,\delta,\ell) \|f\|^p_{L^p(T^\delta(Kx_0))}.
\end{aligned}
$$

$M^\ell_{2\delta}$ kann man überdecken mit $N(\delta)$ Schläuchen $(T^\delta(Kx_i))_{i=1}^{N(\delta)}$ um Orbits der Dimensionen $m - \ell_i \geqslant m - \ell$. Demnach ist

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^p_\ell(M^\ell_{2\delta})} &\leqslant \sum_{k=1}^{N(\delta)} \|f\|_{L^p_\ell(T^\delta(Kx_i))} \leqslant \sum_{k=1}^{N(\delta)} \|f\|_{L^p_{\ell_i}(T^\delta(Kx_i))} \\
&\leqslant c(M,K,\delta,\ell) \sum_{k=1}^{N(\delta)} \|f\|_{L^p(T^\delta(Kx_i))} \leqslant c(M,K,\delta,\ell) \|f\|_{L^p(M)}.
\end{aligned}
$$

□

2.2.2 Gruppenoperationen und Äquivarianz auf Bündeln

Sei K eine kompakte Lie-Gruppe. Wir wollen nun Gruppenoperationen von K auf Prinzipalfaserbündeln $(P, \pi, M; G)$ und dazu assoziierten Faserbündeln definieren.

(M, K) und (P, K) seien kompakte Liesche Transformationsgruppen. Dabei operiere K von links auf die Mannigfaltigkeiten M und P; die Wirkung von $k \in K$ auf M sei mit $k : M \to M$ bezeichnet, die auf P mit $\phi_k : P \to P$. Dabei stellen wir die folgenden beiden Forderungen:

- Fußpunkttreue: $\pi_P(\phi_k p) = k\pi_P(p)$ und
- Verträglichkeit mit G-Wirkung: $(\phi_k p)g = \phi_k(pg)$.

Wir bezeichnen K als Symmetriegruppe (im Gegensatz zur Strukturgruppe G des Faserbündels).

Die Gruppenoperation von K auf P induziert Gruppenoperationen auf allen zu P assoziierten Bündeln:
Die Operation von K auf $P \times_\rho F$ ist definiert durch $\lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor p, f\rfloor := \lfloor \phi_k p, f\rfloor$. Diese Wirkung hängt nicht von der Auswahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse $\lfloor p, f\rfloor$ ab:

$$\lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor pg, \rho(g^{-1})f\rfloor = \lfloor \phi_k(pg), \rho(g^{-1})f\rfloor = \lfloor (\phi_k p)g, \rho(g^{-1})f\rfloor = \lfloor \phi_k p, f\rfloor,$$

Ist F ein Vektorraum, so ist die so definierte Gruppenoperation faserweise eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned}&\lambda_k^{P\times_\rho F}(c\lfloor p, v\rfloor + d\lfloor p, w\rfloor) = \lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor p, cv + dw\rfloor = \lfloor \phi_k p, cv + dw\rfloor = c\lfloor \phi_k p, v\rfloor + d\lfloor \phi_k p, w\rfloor \\ &= c\lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor p, v\rfloor + d\lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor p, w\rfloor.\end{aligned}$$

Die Operation von K auf allen zu P assoziierten metrischen Bündeln ist trivialerweise isometrisch: Die Bündelmetrik $\langle \cdot, \cdot\rangle_{P\times_\rho F}$ auf $P \times_\rho F$ war definiert durch

$$\langle \lfloor p, v\rfloor, \lfloor p, w\rfloor\rangle_{P\times_\rho F} := \langle v, w\rangle_F$$

für $p \in P$, $v, w \in F$ (wobei $\langle \cdot, \cdot\rangle_F$ das Skalarprodukt auf F bezeichnet).
Also ist

$$\begin{aligned}&\langle \lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor p, v\rfloor, \lambda_k^{P\times_\rho F}\lfloor p, w\rfloor\rangle_{P\times_\rho F} = \langle \lfloor \phi_k p, v\rfloor, \lfloor \phi_k p, w\rfloor\rangle_{P\times_\rho F} \\ &= \langle v, w\rangle_F = \langle \lfloor p, v\rfloor, \lfloor p, w\rfloor\rangle_{P\times_\rho F}\end{aligned}$$

für alle $k \in K$.

Daher ist für Schnitte $f \in L^p\Gamma(P \times_\rho F)$ in metrischen Bündeln $|f|$ eine K-invariante Funktion auf M. Demnach ist Lemma 2.2.7 anwendbar: $f \in L^p_\lambda(T^\delta(Kx_0))$ für alle $x_0 \in M$ mit $\dim(Kx_0) \geqslant m - \ell$ und alle $\delta > 0$, sodass $\mathrm{dist}(x_0, M(>K_{x_0})) > 2\delta > 0$.

Insbesondere kann man auf diese Weise K-Wirkungen auf dem adjungierten Bündel adP und der Gruppe der Eichtransformationen $P \times_c G$ definieren. Dabei werden die Abkürzungen $\mu_k := \lambda_k^{P\times_c G}$ und $\lambda_k := \lambda_k^{adP}$ verwendet.
Indem man $P\times_c G$ als Unterbündel von $Aut(adP)$ auffasst, kann man die K-Operation μ_k auf $P \times_c G$ auf konjugierte Verknüpfung mit λ_k zurückführen:

$$(\mu_k \sigma(k^{-1}x))Y(x) = (\lambda_k \circ \sigma(k^{-1}x) \circ \lambda_k^{-1})Y(x).$$

Denn:
Seien $x \in M$, $p \in P_x$, $k \in K$ und sei $w \in \mathfrak{g}$, sodass $Y(x) = \lfloor p, w \rfloor$. Für jedes $q \in P_{k^{-1}x}$ gibt es ein $h \in G$, sodass $\sigma(k^{-1}x) = \lfloor q, h \rfloor$. Damit ist

$$(\mu_k \sigma(k^{-1}x))Y(x) = \lfloor \phi_k q, h \rfloor [\lfloor p, w \rfloor].$$

Da die G-Operation auf jeder Faser von P transitiv ist und sowohl $\phi_k q \in P_x$ als auch $p \in P_x$, gibt es ein $g \in G$, sodass $pg = \phi_k q$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\lfloor \phi_k q, h \rfloor \lfloor p, w \rfloor = \lfloor pg, h \rfloor \lfloor p, w \rfloor = \lfloor p, ghg^{-1} \rfloor \lfloor p, w \rfloor = \lfloor p, (ghg^{-1})^{-1} w (ghg^{-1}) \rfloor \\ &= \lfloor p, gh^{-1}g^{-1}wghg^{-1} \rfloor = \lfloor pg, h^{-1}g^{-1}wgh \rfloor = \lfloor \phi_k q, h^{-1}g^{-1}wgh \rfloor \\ &= \lambda_k [\lfloor q, h^{-1}g^{-1}wgh \rfloor] = \lambda_k \left(\lfloor q, h \rfloor \lfloor q, g^{-1}wg \rfloor \right) = \lambda_k \left(\lfloor q, h \rfloor \lfloor qg^{-1}, w \rfloor \right). \end{aligned}$$

Wegen der Verträglichkeit von ϕ_k mit der G-Gruppenwirkung ist

$$qg^{-1} = \phi_k^{-1}(pg)g^{-1} = \phi_k^{-1}p.$$

Daher:

$$\begin{aligned} &\lambda_k \left(\lfloor q, h \rfloor \lfloor qg^{-1}, w \rfloor \right) = \lambda_k \left(\lfloor q, h \rfloor \lfloor \phi_{k^{-1}} p, w \rfloor \right) = \lambda_k \left(\lfloor q, h \rfloor [\lambda_{k^{-1}} \lfloor p, w \rfloor] \right) \\ &= (\lambda_k \circ \sigma(k^{-1}x) \circ \lambda_k^{-1})[Y(x)], \end{aligned}$$

was der oben behaupteten Gleichheit entspricht.

Eine Eichtransformation $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ wird in dieser Arbeit als K-äquivariant bezeichnet, wenn $\sigma(kx) = \mu_k \sigma(x)$. Wie eben gesehen, ist das gleichbedeutend dazu, dass für alle $Y \in \Gamma(adP)$ gilt:

$$\sigma(kx)[Y(kx)] = (\lambda_k \circ \sigma(x) \circ \lambda_k^{-1})Y(kx),$$

also

$$\sigma(kx) = \lambda_k \circ \sigma(x) \circ \lambda_k^{-1}.$$

Definiere die folgende (Abkürzung für eine) K-Operation auf Schnitten in adP:
Für $k \in K$ und $Y \in \Gamma(adP)$ sei

$$\tau_k Y(x) := \lambda_k Y(k^{-1}x)$$

für alle $x \in M$.

Ein Vektorfeld $Y \in \Gamma(adP)$ wird in dieser Arbeit als K-äquivariant bezeichnet, wenn $Y(kx) = \lambda_k Y(x)$ für alle $k \in K$ und alle $x \in M$. Das ist gleichbedeutend zu

$$\tau_k Y = Y$$

für alle $k \in K$. Eine Differentialform $X \in \Omega^\beta(adP)$ wird in dieser Arbeit als K-äquivariant bezeichnet, wenn $\lambda_k X = k^* X$ für alle $k \in K$.

Sei $Y \in \Gamma(adP)$ ein beliebiges (nicht notwendigerweise K-äquivariantes) Vektorfeld. Dann gilt für Eichtransformationen $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$:

$$\begin{aligned}\tau_k^{-1}(\sigma(x)[\tau_k Y(x)]) = \lambda_k^{-1}(\sigma(kx)[\tau_k Y(kx)]) &= \lambda_k^{-1}(\sigma(kx)[\lambda_k Y(x)]) \\ &= (\mu_k^{-1}\sigma(kx))[Y(x)].\end{aligned}$$

Insbesondere ist für K-äquivariante Eichtransformationen σ

$$\tau_k^{-1}(\sigma(x)[\tau_k Y(x)]) = \sigma(x)[Y(x)].$$

Eine kovariante Ableitung $\nabla : \Gamma(adP) \to \Gamma(adP)$ wird in dieser Arbeit als K-äquivariant bezeichnet, wenn gilt:

$$\tau_k^{-1}(\nabla_{k_* u}[\tau_k Y](x)) = \nabla_u Y(x)$$

für alle $k \in K$, $Y \in \Omega^0(adP)$, $x \in M$ und $u \in T_x M$ (diese Definition wird aus [Gas13], Seite 141, übernommen).

Eine äquivariant (also mit einer äquivarianten Eichtransformation) umgeeichte äquivariante kovariante Ableitung ist selbst wieder äquivariant:

$$\begin{aligned}&\tau_k^{-1}[\sigma^*(\nabla_{k_* u}[\tau_k Y])](x) = \tau_k^{-1}(\sigma(x)^{-1}(\nabla_{k_* u}(\sigma(x)(\tau_k Y(x))))) \\ &= \sigma(x)^{-1}(\tau_k^{-1}(\nabla_{k_* u}(\tau_k(\sigma(x)Y(x))))) = \sigma(x)^{-1}(\nabla_u(\sigma(x)Y(x))).\end{aligned}$$

Ist $Y \in \Gamma(adP)$ ein K-äquivariantes Vektorfeld und $\nabla : \Gamma(adP) \to \Gamma(adP)$ eine K-äquivariante kovariante Ableitung, so ist ∇Y eine K-äquivariante 1-Form:

$$k^*(\nabla Y)_u(x) = \nabla_{k_* u} Y(kx) = \nabla_{k_* u}(\tau_k Y(kx)) = \tau_k(\nabla_u Y(kx)) = \lambda_k(\nabla_u Y(x)).$$

Ist $A \in \Omega^1(adP)$ und D ein Referenzzusammenhang von P, sodass die zu D gehörige kovariante Ableitung K-äquivariant ist und sodass $\nabla = D + A$, so folgt für jedes $x \in M$, $u \in T_x M$ und $Y \in \Gamma(adP)$:

$$\begin{aligned}\nabla_u Y(x) &= \tau_k^{-1}(\nabla_{k_* u}[\tau_k Y])(x) = \tau_k^{-1}(D_{k_* u}[\tau_k Y])(x) + \tau_k^{-1}(A_{k_* u}[\tau_k Y])(x) \\ &= D_u Y(x) + \tau_k^{-1}(A_{k_* u}[\tau_k Y])(x) = D_u Y(x) + \lambda_k^{-1}(A_{k_* u}\tau_k Y)(kx) \\ &= D_u Y(x) + \lambda_k^{-1} A_{k_* u}(kx)\lambda_k Y(x).\end{aligned}$$

Für die Zusammenhangsform $A \in \Gamma(adP)$ muss demnach gelten:

$$A_u(x) = \lambda_k^{-1} A_{k_* u}(kx)\lambda_k,$$

damit $\nabla = D + A$ eine K-äquivariante kovariante Ableitung ist (vergleiche [Gas13], Seite 141).
Man bezeichnet A dann auch als K-äquivariante Zusammenhangsform. (Beachte, dass K auf Zusammenhangsformen $A \in \Omega^1(adP) \subset \Omega^1(Aut(adP))$ anders operiert als auf "herkömmlichen" Differentialformen $X \in \Omega^1(adP)$!)

Ist $\nabla : \Gamma(adP) \to \Omega^1(adP)$ eine K-äquivariante kovariante Ableitung, so folgt für die Krümmung von ∇:

$$\begin{aligned}
(F_\nabla)_{uv}(x)Y(x) &= (\nabla_u\nabla_v - \nabla_v\nabla_u)Y(x)\\
&= \tau_k^{-1}(\nabla_{k_*u}\nabla_{k_*v} - \nabla_{k_*v}\nabla_{k_*u})(\tau_k Y)(x)\\
&= \lambda_k^{-1}(\nabla_{k_*u}\nabla_{k_*v} - \nabla_{k_*v}\nabla_{k_*u})\lambda_k Y(x)\\
&= \lambda_k^{-1}(F_\nabla)_{k_*u,k_*v}(kx)\lambda_k Y(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in M$, $u, v \in T_xM$ und $Y \in \Gamma(adP)$, also

$$(F_\nabla)_{uv}(x) = \lambda_k^{-1}(F_\nabla)_{k_*u,k_*v}(kx)\lambda_k.$$

Symmetrien unter Lie-Gruppen sind im Zusammenhang mit Problemen der Variationsrechnung häufig von Vorteil, denn viele Funktionale erfüllen das "Prinzip der symmetrischen Kritikalität" nach [Pal79]. Dieses besagt grob, dass in vielen Fällen kritische symmetrische Punkte des entsprechenden Funktionals bereits symmetrische kritische Punkte sind.

Wie in [Gas13] (Proposition 1, Seite 142) gezeigt, gilt dieses Prinzip im Fall des Yang-Mills-Funktionals; genauer:

Satz 2.2.8 (Symmetrische Kritikalität)**.** *Ein K-äquivarianter Zusammenhang $D+A$ auf dem Bündel adP ist bereits ein Yang-Mills-Zusammenhang, wenn er nur in Bezug auf äquivariante Variationen kritisch ist.*

Das heißt: Ist $A \in (W^{1,2} \cap L^4)\Omega^1(adP)$, sodass

$$\int_M (\langle (D+A)\tilde{\varphi}, F_{D+A}\rangle_{adP\otimes\wedge^2 TM})\ dx = 0$$

für alle $\tilde{\varphi} \in \Omega^1(adP)$ mit

$$\tilde{\varphi}_u(x) = \lambda_k^{-1}\tilde{\varphi}_{k_*u}(kx)\lambda_k$$

für alle $x \in M$, $u \in T_xM$, $k \in K$,
dann ist bereits

$$\int_M \langle (D+A)\varphi, F_{D+A}\rangle \phi\, dx = 0$$

für alle $\phi \in \Omega^1(adP)$.

2.2.3 Definition von Gruppenoperationen von K_{x_0}

Für jedes $z \in Kx_0$ gibt es ein $\kappa_z \in K$, sodass $z = \kappa_z x_0$. Demnach wirkt auf die Scheibe $S_z^r = S_{\kappa_z x_0}^r \subset T^\rho(Kx_0)$ die Isotropiegruppe $K_z = K_{\kappa_z x_0} = \kappa_z K_{x_0} \kappa_z^{-1}$.
Auf Grundlage dieser Überlegung sollen in diesem Abschnitt Operationen von K_{x_0} auf einen Schlauchabschnitt sowie den darauf eingeschränkten betrachteten Faserbündeln definiert werden (und diese Gruppenoperationen auf lokal trivialisierte Bündel über parametrisierten Schlauchabschnitten übertragen werden).

In der Regel (wenn $K_{x_0} \neq \{id\}$), ist dabei κ_z nicht eindeutig bestimmt. Da die Operation von K_{x_0} in der eben erwähnten Idee von dieser Auswahl abhängt, wird auch sie folglich nicht "natürlich" oder eindeutig bestimmt sein; insbesondere ist sie im Allgemeinen nicht glatt, da die κ_z im Allgemeinen nicht differenzierbar von z abhängen müssen.

Ziel dieses Abschnitts ist, dennoch eine K_{x_0}-Operation auf einen Schlauchabschnitt $T^r(Kx_0)|_U$ (für $U \subset Kx_0$ hinreichend klein mit $x_0 \in U$) zu definieren, welche glatt und scheibenweise isometrisch ist. Daraus soll eine glatte, isometrische K_{x_0}-Operation auf der Parametrisierung $B_\rho^\ell(0) \times B_\rho^{m-\ell}(0)$ konstruiert werden:

Operationen auf dem Schlauchabschnitt

Lemma 2.2.9 (Operationen von Isotropiegruppen auf Schlauchabschnitten)**.**
Sei $x_0 \in M$ und sei ϕ die orbittreue Parametrisierung von $T^r(Kx_0)$ lokal um x_0. Dann gibt es einen Orbitabschnitt $U := \phi(\{0\} \times B_r^{m-\ell}(0)) \subset Kx_0$, sodass gilt:

- *es gibt eine differenzierbare Abbildung $\kappa : Kx_0 \to K$, $z \mapsto \kappa_z$ mit $z = \kappa_z x_0$;*
- *K_{x_0} operiert differenzierbar auf $T^r(Kx_0)|_U$ mittels*
$$\tilde{k}x = \kappa_z k \kappa_z^{-1} x$$
für $x \in S_z^r$;
- *K_{x_0} operiert differenzierbar und isometrisch auf $B_r^{m-\ell}(0) \times B_r^\ell(0)$ durch*
$$\bar{k}\bar{x} := \phi^{-1}(\kappa_z k \kappa_z^{-1} \phi(\bar{x}))$$
(für $\phi(\bar{x}) \in S_z^r$ und $k \in K_{x_0}$ und bei der richtigen Wahl der Trivialisierung von $\nu(Kx_0)|_U$ in orbittreuer Parametrisierung ϕ); für diese Operation gibt es eine Darstellung $K_{x_0} \hookrightarrow \{id\} \otimes O(\ell)$.

Beweis.

- Sei $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebra zu K, $\mathfrak{k}_{x_0}$ die Lie-Algebra zu K_{x_0}. Dann ist $\mathfrak{k}_{x_0}$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{k}$. Demnach gibt es einen weiteren Untervektorraum $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{k}_{x_0} = \{0\}$ und $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}_{x_0} = \mathfrak{k}$.
  Für die Dimension der Lie-Gruppe K gilt: $\dim(K) = \dim(K_{x_0}) + \dim(Kx_0)$. Daraus folgt direkt:

  $$\dim(\mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{k}) - \dim(\mathfrak{k}_{x_0}) = \dim(K) - \dim(K_{x_0}) = \dim(Kx_0).$$

  Betrachte nun die Abbildung $\tau : \mathfrak{m} \to Kx_0$, $\tau(h) = \exp(h)x_0$. (Beachte, dass hier $\exp : \mathfrak{k} \to K$ die Exponentialabbildung auf der Lie-Algebra $\mathfrak{k}$ ist.) Diese Abbildung hat auf einer Umgebung von $0 \in \mathfrak{m}$ vollen Rang:

  Betrachte dafür die Abbildung $j : K \to Kx_0$, $j(k) = kx_0$. Offensichtlich ist $\tau = j \circ \exp$. Für jedes $k \in K$ gilt: $j(k) = kx_0 = (k \cdot id_K)x_0 = kj(id_k)$ und daher

  $$dj(k) = k_* dj(id_K).$$

  Weiterhin gibt es Umgebungen $V \subset \mathfrak{k}$ von $0 \in \mathfrak{k}$ und $V' \subset K$ von id_K, sodass $\exp|_V : V \to V'$ ein Diffeomorphismus ist. Für jedes $k \in V'$ gibt es demnach genau ein $v_k \in V$, sodass $\exp(v_k) = k$. Wir erhalten für jedes $v_k \in V$:

  $$d\tau(v_k) = d(j \circ \exp)(v_k) = dj(\exp(v_k)) \cdot d\exp(v_k) = k_* dj(id_K) \cdot d\exp(v_k).$$

  Da K isometrisch auf M operiert und da exp lokal um $0 \in \mathfrak{k}$ ein Diffeomorphismus ist, folgt:

  $$rang(\tau)(v_k) = rang(j)(id_K)$$

  für alle $v_k \in V$. Insbesondere gilt dann: $rang(\tau)(v_k) = rang(\tau)(0)$ für alle $v_k \in V$. Nehmen wir nun an, dass $rang(\tau)(0) < \dim(Kx_0)$ wäre, so ist das $\dim(Kx_0)$-dimensionale Hausdorff-Maß

  $$H^{\dim(Kx_0)}(\{\tau(v) : rang(\tau)(v) < \dim(Kx_0)\}) \geqslant H^{\dim(Kx_0)}(\tau(V)) > 0.$$

  Das ist ein Widerspruch zum Satz von Sard (siehe zum Beispiel [GP74], Sard's Theorem, Seite 39) und kann daher nicht gelten: Demnach muss τ in 0 vollen Rang haben.

  Der Umkehrsatz besagt daher, dass es eine Umgebung $U \subset V \subset \mathfrak{m}$ von 0 gibt, sodass $\tau|_U$ ein Diffeomorphismus ist.

  Definiere $\kappa_z := \exp(\tau^{-1}(z))$ für $z \in \tau(U)$. Dann ist die Zuordnung $z \mapsto \kappa_z$ differenzierbar.

- Damit definieren wir einen Diffeomorphismus

  $$\varphi : T^r(Kx_0)|_U = \bigcup_{z \in U} S_z^r \to U \times S_{x_0}^r$$

durch
$$\varphi(x) = (z, \kappa_z^{-1}x) \quad \text{für } x \in S_z^r.$$
Auf $U \times S_{x_0}^r$ operiert K_{x_0} durch Isometrien (K_{x_0} operiert dort als $\{id\} \times K_{x_0}$, also mittels $h(z,v) := (z, hy)$ für alle $h \in K_{x_0}$, $z \in U$ und $y \in S_{x_0}^r$).
Mittels
$$\tilde{k}x := \varphi^{-1}(k\varphi(x)) \quad \text{für } k \in K_{x_0} \text{ und } x \in T^r(Kx_0)|_U$$
kann man daraus eine (glatte) K_{x_0}-Operation auf dem Schlauchabschnitt definieren.
Dann ist für $x \in S_z^r$ und $k \in K_{x_0}$
$$\tilde{k}x = \varphi^{-1}(k\varphi(x)) = \varphi^{-1}(k(z, \kappa_z^{-1}x)) = \varphi^{-1}(z, k\kappa_z^{-1}x) = \kappa_z k \kappa_z^{-1} x.$$

- Weiterhin kann man mittels einer orbittreuen Parametrisierung
$$\phi : B_r^{m-\ell}(0) \times B_r^\ell(0) \to T^r(Kx_0)|_U$$
(vergleiche Korollar 2.2.5) eine K_{x_0}-Operation auf $\mathbb{R}^m$ definieren:
$$\bar{k}\bar{x} := \phi(\tilde{k}\phi^{-1}(\bar{x})) = \phi(\kappa_z k \kappa_z^{-1}\phi(\bar{x})) \quad \text{für } \bar{x} \in B_r^\ell(0) \text{ mit } \phi(\bar{x}) \in S_z^r \text{ und } k \in K_{x_0}.$$
Damit diese Definition für den weiteren Gebrauch praktisch ist, wählen wir dabei jedoch eine spezielle orbittreue Parametrisierung:

Beachte, dass die orbittreue Parametrisierung $\phi := \exp \circ \psi_\nu^{-1} \circ (\tilde{\phi} \otimes id_{\mathbb{R}^\lambda})$ von der Parametrisierung $\tilde{\phi} : U \to B_{m-\ell}^r$ des Orbitabschnitts und der lokalen Trivialisierung $\psi_\nu : \nu(Kx_0)|_U \to U \times \mathbb{R}^\ell$ abhängt.
Die soeben definierte Abbildung φ definiert eine Trivialisierung ψ_ν von $\nu(Kx_0)|_U$ mittels
$$\psi_\nu := (id_{Kx_0} \otimes (i \circ \exp^{-1})) \circ \varphi$$
wobei $i := \psi_\nu^{-1}|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}^\ell} : \nu_{x_0}(Kx_0) \to \mathbb{R}^\ell$ die Identifikation von $\nu_{x_0}(Kx_0)$ mit $\mathbb{R}^\ell$ bezeichnet.
Unter Verwendung der damit definierten orbittreuen Parametrisierung ϕ von $T^r(Kx_0)|_U$ ist
$$\begin{aligned}\bar{k}\bar{x} &= (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{m-\ell}, (\phi^{-1})_2(\tilde{k}\phi(0, \ldots, 0, \bar{x}_{m-\ell+1}, \ldots, \bar{x}_m))) \\ &=: (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{m-\ell}, \ell_k(\bar{\bar{x}})).\end{aligned}$$
Die K_{x_0}-Operation auf $B_r^{m-\ell}(0) \times B_r^\ell(0)$ verändert demnach nur die zweite Komponente. Weiterhin gilt für diese Operation nach Konstruktion:
$$\ell_k(\bar{\bar{x}}) := i(\exp^{-1}(k \exp(i^{-1}(\bar{\bar{x}})))).$$
Es bleibt zu zeigen, dass diese K_{x_0}-Operation auf $B_r^\ell(0)$ isometrisch ist. Definiere für jedes $k \in K_{x_0}$ die Abbildung $\mu_k : S_{x_0}^r \to S_{x_0}^r$ durch $\mu_k x := kx$.

Da i die Identifikation zweier Vektorräume ist, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass i eine Isometrie ist.
$\exp^{-1}$ bildet Geodätische durch x_0 in $S^r_{x_0}$ ab auf Strahlen durch den Ursprung in $\nu_{x_0}(Kx_0)$ (und erhält dabei deren Längen), demnach bildet auch $i \circ \exp^{-1}$ Geodätische durch x_0 in $S^r_{x_0}$ ab auf Strahlen durch den Ursprung in $B^r_\ell(0)$.

Da $\mu_k : S^r_{x_0} \to S^r_{x_0}$ für jedes $k \in K_{x_0}$ eine Isometrie ist, bildet μ_k Geodätische durch x_0 in $S^r_{x_0}$ ab auf Geodätische durch x_0 in $S^r_{x_0}$ (und erhält dabei deren Längen). Demnach bildet ℓ_k Strecken durch den Ursprung ab auf Strecken durch den Ursprung (und erhält dabei ebenfalls deren Längen).
Es folgt:

$$\ell_k(tv) = t\ell_k(v) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, k \in K_{x_0} \text{ und alle } v \in B^\ell_r(0).$$

Weiterhin gilt für die Jacobi-Matrix von ℓ_k im Ursprung:

$$\begin{aligned}
&J_{\ell_k}(0) = J_{i \circ \exp^{-1} \circ \mu_k \circ \exp \circ i^{-1}}(0) \\
&= J_i(\exp^{-1}(\mu_k(\exp(i^{-1}(0)))))J_{\exp^{-1}}(\mu_k(\exp(i^{-1}(0))))J_{\mu_k}(\exp(i^{-1}(0))) \\
&\qquad J_{\exp}(i^{-1}(0))J_{i^{-1}}(0) \\
&= J_i(\exp^{-1}(\mu_k(x_0)))J_{\exp^{-1}}(\mu_k(x_0))J_{\mu_k}(x_0)J_{\exp(0)}J_{i^{-1}}(0) \\
&\in O(\ell),
\end{aligned}$$

da μ_k und i Isometrien sind und $J_{\exp}(0) = id_{\nu_{x_0}(Kx_0)}$.

Wegen

$$\ell_k(v) = \frac{\ell_k(tv) - \ell_k(0)}{t} = \frac{\partial}{\partial v}\ell_k(0) = J_{\ell_k}(0)v$$

folgt daraus, dass ℓ_k auf $\mathbb{R}^\ell$ als Isometrie operiert.

□

Operationen auf den darüber liegenden Bündeln

Definiere unter Verwendung derselben κ_z die folgenden Operationen von K_{x_0} auf $adP|_{T^\rho_{x_0}}$ bzw. $(P \times_c G)|_{T^\rho(Kx_0)}$: Für $y \in S^\rho_z$, $k \in K_{x_0}$, $Y \in adP_y$ und $\sigma \in (P \times_c G)_y$ sei

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_k Y &:= \lambda_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}} Y \in adP|_{S^\rho_z}; \\
\tilde{\mu}_k \sigma &:= \mu_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}} \sigma \in (P \times_c G)|_{S^\rho_z}.
\end{aligned}$$

Dann ist $\pi(\tilde{\lambda}_k Y) = \pi(\lambda_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}} Y) = \kappa_z k \kappa_z^{-1} \pi(Y) = \tilde{k}\pi(Y)$ für alle $k \in K_{x_0}$ und für alle $Y \in adP|_{T^\rho(Kx_0)}$ (und analog $\pi(\tilde{\mu}_k \sigma) = \tilde{k}\pi(\sigma)$ für alle $k \in K_{x_0}$ und für alle $Y \in (P \times_c G)|_{T^\rho(Kx_0)}$). Also sind die so definierten K_{x_0}-Operationen verträglich mit der Bündelprojektion.

Welche Zusammenhänge, Zusammenhangsformen, Vektorfelder und Eichtransformationen bezüglich der so definierten K_{x_0}-Operationen äquivariant sind, hängt dabei nicht von den κ_z ab:

Seien dafür $\kappa : Kx_0 \to K$ und $\kappa' : Kx_0 \to K$ zwei glatte Abbildungen, sodass für alle $z \in Kx_0$ gilt: $\kappa'_z x_0 = \kappa_z x_0 = z$. Dann erhält man zwei verschiedene K_{x_0}-Operationen auf $T^\rho(Kx_0)$ und den darüber liegenden Bündeln: einerseits $\tilde{k}$, $\tilde{\lambda}_k$ und $\tilde{\mu}_k$ wie oben definiert, andererseits

$$\begin{aligned} \tilde{k}'y &:= \kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1} y \in S^\rho_z; \\ \tilde{\lambda}'_k Y &:= \lambda_{\kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1}} Y \in adP|_{S^\rho_z}; \\ \tilde{\mu}'_k \sigma &:= \mu_{\kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1}} \sigma \in (P \times_c G)|_{S^\rho_z}. \end{aligned}$$

Definiere für alle $z \in Kx_0$: $h_z := \kappa_z^{-1}\kappa'_z$. Offensichtlich ist $h_z \in K_{x_0}$.

Sei $A \in \Omega^1(adP|_{T^r(Kx_0)})$ eine bezüglich $(\kappa_z)_{z \in Kx_0}$ K_{x_0}-äquivariante Zusammenhangsform, also

$$A_{\tilde{\ell}_* u}(\tilde{\ell}x) = \tilde{\lambda}_\ell \circ A_u(x) \circ \tilde{\lambda}_\ell^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A_{(\kappa_z \ell \kappa_z^{-1})_* u}(\kappa_z \ell \kappa_z^{-1} x) = \lambda_{\kappa_z \ell \kappa_z^{-1}} \circ A_u(x) \circ \lambda^{-1}_{\kappa_z \ell \kappa_z^{-1}}$$

für alle $\ell \in K_{x_0}$, alle $x \in T^r(Kx_0)$ und alle $u \in T_x M$.
Dann ist auch für alle $k \in K_{x_0}$

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda}'_k \circ A_u(x) \circ (\tilde{\lambda}'_k)^{-1} = \lambda_{\kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1}} \circ A_u(x) \circ \lambda^{-1}_{\kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1}} \\ &= \lambda_{\kappa_z(h_z k h_z^{-1})\kappa_z^{-1}} \circ A_u(x) \circ \lambda^{-1}_{\kappa_z(h_z k h_z^{-1})\kappa_z^{-1}} = A_{(\kappa_z(h_z k h_z^{-1})\kappa_z^{-1})_* u}(\kappa_z(h_z k h_z^{-1})\kappa_z^{-1} x) \\ &= A_{(\kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1})_* u}(\kappa'_z k(\kappa'_z)^{-1} x) = A_{\tilde{k}'_* u}(\tilde{k}' x). \end{aligned}$$

Das heißt, A ist auch K_{x_0}-äquivariant bezüglich $(\kappa'_z)_{z \in Kx_0}$.

Völlig analog kann man zeigen, dass es nicht von der Abbildung $\kappa : Kx_0 \to K$ abhängt, welche Vektorfelder und Eichtransformationen K_{x_0}-äquivariant sind.

Demnach ergeben die so definierten K_{x_0}-Operationen einen natürlichen Begriff (das heißt: einen nicht von κ abhängenden Begriff) von K_{x_0}-äquivarianten Schnitten in $adP|_{T^\rho(Kx_0)}$ und $(P \times_c G)|_{T^\rho(Kx_0)}$, obwohl die K_{x_0}-Operationen selbst von der Abbildung κ abhängen.

Operationen auf den trivialisierten Bündeln

Definiere nun eine K_{x_0}-Operation auf $U \times \mathfrak{g}$ (mit $U \subset M$), auf $B^m_r \subset \mathbb{R}^m$ sowie auf $B^m_r \times \mathfrak{g}$ mittels einer lokalen Parametrisierung ϕ von M und einer lokalen Trivialisierung ψ von adP:

$$\hat{\lambda}_k(x,v) := \psi(\tilde{\lambda}_k \psi^{-1}(x,v)) \quad \text{für } x \in S^r_{\kappa x_0} \text{ und } v \in \mathfrak{g};$$
$$\bar{\lambda}_k(\bar{x},v) := \psi(\tilde{\lambda}_k \psi^{-1}(\bar{x},v)) = \psi(\lambda_{\kappa k \kappa^{-1}} \psi^{-1}(\bar{x},v) \lambda_{\kappa k \kappa^{-1}}) \quad \text{für } \bar{x} \in \phi^{-1}(S^r_{\kappa x_0}) \text{ und } v \in \mathfrak{g};$$
$$\bar{\lambda}_k(\bar{x},v) := \psi(\tilde{\lambda}_k \psi^{-1}(\bar{x},v)) = \psi(\lambda_{\kappa k \kappa^{-1}} \psi^{-1}(\bar{x},v) \lambda_{\kappa k \kappa^{-1}}) \quad \text{für } \bar{x} \in \phi^{-1}(S^r_{\kappa x_0}) \text{ und } v \in \mathfrak{g}.$$

Wiederum handelt es sich um Gruppenoperationen von K_{x_0}, die verträglich sind mit der Bündelprojektion, wiederum erhalten wir einen natürlichen Begriff von äquivarianten Schnitten.

Unter den so definierten Gruppenoperationen sind die Parametrisierung ϕ und die lokale Trivialisierung ψ trivialerweise K_{x_0}-äquivariant.

3 Voraussetzungen dieser Arbeit

3.1 Voraussetzungen und Notationen

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit gelten die folgenden Voraussetzungen:

- (M, γ) sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m. Der Injektivitätsradius von M sei mit $\rho_0 > 0$ bezeichnet.
- $(P, \pi, M; G)$ sei ein Prinzipalfaserbündel über M.
- Weiterhin sei K eine kompakte Lie-Gruppe, welche auf P und M operiert, im Sinne von Abschnitt 2.2.2. Die Operation von K auf M sei isometrisch.
- Sei D ein K-äquivarianter Zusammenhang von P. Diesen fixiere als Referenzzusammenhang.

An einigen Stellen verwenden wir weiterhin die Definition

$$\rho^*(x) := \frac{1}{4} \min\{\mathrm{dist}\{x, M(> K_x)\}, \rho_0\}$$

(für jedes $x \in M$). Diese wird dort zwar meist wiederholt, kommt aber im Verlauf dieser Arbeit so häufig vor, dass sie hier fixiert sein soll.

3.2 Beispiel

Ein Satz ist nur etwas wert, wenn die Menge der mathematischen Objekte, auf die er angewandt werden kann, nicht leer ist. Daher soll in diesem Kapitel ein Beispiel konstruiert werden, das sämtliche Generalvoraussetzungen (siehe Abschnitt 3.1) für die Anwendung von Satz 5.2.2 erfüllt.

Konstruiert werden soll hier demnach eine Liegruppe K, eine Mannigfaltigkeit M und ein Prinzipalfaserbündel $(P, \pi, M; G)$, sodass die K-Operation auf M Kohomogenität $\ell \leqslant 4$ hat. In Anlehnung an [DW71] definiere dafür

$$K := SO(n_1) \otimes SO(n_2) \otimes \cdots \otimes SO(n_\ell)$$

und ein dazu passendes Bündel.

(Diese Idee übernehmen wir aus [Gas13], wo dieses Beispiel für den Fall $\ell = 2$ ausführlich betrachtet wird; in diesem Fall kann die Euler-Lagrange-Gleichung zum Yang-Mills-Funktional auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden.)

3.2.1 Gruppenoperation der Kohomogenität 0

Sei $H^{n,k}$ der Vektorraum der homogenen harmonischen Polynome vom Grad k auf $\mathbb{R}^n$, also der Polynome

$$p(x) = \sum_{k_1+\ldots k_n=k} c_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

mit $\Delta p(x) = 0$.
$H^{n,k}$ ist ein endlichdimensionaler Vektorraum (dessen Dimension wir mit $d(n,k)$ bezeichnen) mit Skalarprodukt $\langle p, q\rangle := \int_{S^{n-1}} p(x)q(x)\,dx$. Demnach gibt es eine Orthonormalbasis $\{p_i\}_{i\in\{1,\ldots,d(n,k)\}}$.
Wir definieren eine Abbildung $h_{n,k} : \mathbb{R}^n \to H^{n,k}$ durch

$$h_{n,k}(y) := \frac{1}{\sum_{i=1}^{d(n,k)} p_i(e_1)^2} \sum_{i=1}^{d(n,k)} p_i(y)p_i.$$

$SO(n)$ operiert isometrisch auf $H^{n,k}$ durch

$$(\kappa p)(x) := p(\kappa^{-1}x) \quad \text{für } \kappa \in SO(n).$$

Unter dieser Operation ist die Abbildung $h_{n,k}$ $SO(n)$-äquivariant:

$$\begin{aligned}
h_{n,k}(\kappa y)(x) &= \sum_{i=1}^{d(n,k)} p_i(\kappa y)p_i(x) = \sum_{i=1}^{d(n,k)} \sum_{j=1}^{d(n,k)} \langle p_i \circ \kappa, p_j\rangle p_j(y)p_i(x)\\
&= \sum_{i=1}^{d(n,k)} \sum_{j=1}^{d(n,k)} \langle p_i, p_j \circ \kappa^{-1}\rangle p_j(y)p_i(x)\\
&= \sum_{j=1}^{d(n,k)} \left(\sum_{i=1}^{d(n,k)} \langle p_j \circ \kappa^{-1}, p_i\rangle p_i(x)p_j(y) \right)\\
&= \sum_{j=1}^{d(n,k)} p_j(\kappa^{-1}x)p_j(y) = h_{n,k}(y)(\kappa^{-1}x)\\
&= (\kappa h_{n,k}(y))(x).
\end{aligned}$$

Daher ist die Einschränkung $h_{n,k} : S^{n-1} \to S^{d(n,k)-1} \subset H^{n,k}$ eine Abbildung zwischen Sphären. $SO(n)$ operiert transitiv auf S^{n-1}; demnach gibt es zu jedem $x \in S^{n-1}$ ein $\kappa_x \in SO(n)$, sodass $\kappa_x x = e_1$. Auf Grund der $SO(n)$-Äquivarianz von $h_{n,k}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&|h_{n,k}(x)| = |h_{n,k}(\kappa_x^{-1} e_1)| = |\kappa_x(h_{n,k}(e_1))| = |h_{n,k}(e_1)| \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{d(n,k)} p_i(e_1)^2} \left(\langle \sum_{j=1}^{d(n,k)} p_j(e_1) p_j(x), \sum_{j=1}^{d(n,k)} p_j(e_1) p_j(x) \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{d(n,k)} p_i(e_1)^2} \left(\sum_{i,j=1}^{d(n,k)} p_i(e_1) p_j(e_1) \langle p_i(x), p_j(x) \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{d(n,k)} p_i(e_1)^2} \left(\sum_{j=1}^{d(n,k)} p_j(e_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

da die oben definierte $SO(n)$-Operation auf $H^{n,k}$ isometrisch ist.

Durch Differentiale operiert $SO(n)$ auf den Tangentialraum $TS^{d(n,k)-1}$ ($\kappa_* v := d_v \kappa(p)$ für alle $\kappa \in K$, $p \in S^{d(n,k)-1}$ und $v \in T_p S^{d(n,k)-1}$).
Auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ operiert $SO(n)$ auf die kanonische Art.

Wir betrachten nun das unter $h_{n,k}$ zurückgezogene Bündel $h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1}$ (definiert durch $(h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1})_x = T_{h_{n,k}(x)} S^{d(n,k)-1} \simeq \mathbb{R}^{d(n,k)-1}$ für jedes $x \in S^{n-1}$). Die Elemente von $h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1}$ kann man identifizieren mit Paaren (x, v), wobei $x \in S^{n-1}$ und $v \in T_{h_{n,k}(x)} S^{d(n,k)-1}$.

$SO(n)$ operiert auf $h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1}$ durch

$$\kappa(x, v) := (\kappa x, \kappa_* v).$$

(Diese Operation ist wohldefiniert, da für $v \in T_{h_{n,k}(x)} S^{d(n,k)-1}$ gilt:
$\kappa_* v \in T_{\kappa h_{n,k}(x)} S^{d(n,k)-1} = T_{h_{n,k}(\kappa^{-1} x)} S^{d(n,k)-1}$.)

Sei $\nabla^{LC} : \Gamma(TS^{d(n,k)-1}) \to \Omega^1(TS^{d(n,k)-1})$ die aus dem Levi-Civita-Zusammenhang kommende kovariante Ableitung auf $S^{d(n,k)-1} \subset H^{n,k} \sim \mathbb{R}^{d(n,k)}$:

$$\nabla^{LC}_v u(p) = \partial_v u(p) - \langle p, \partial_v u(p) \rangle p$$

für $p \in S^{d(n,k)-1}$, $v \in T_p S^{d(n,k)-1}$ und $u \in \Gamma(TS^{d(n,k)-1})$.
$\nabla^{LC} : \Gamma(TS^{d(n,k)-1}) \to \Omega^1(TS^{d(n,k)-1})$ ziehen wir zurück unter $h_{n,k}$, um eine kovariante Ableitung auf $h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1}$ zu erhalten: Wir definieren also

$$\nabla : \Gamma(h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1}) \to \Omega^1(h^*_{n,k} TS^{d(n,k)-1})$$

durch

$$\nabla_v u(x) := (h_{n,k}^* \nabla_v^{LC})u(x) = \partial_v u(x) - \langle h_{n,k}(x), \partial_v u(x)\rangle h_{n,k}(x).$$

Dann ist ∇ $SO(n)$-äquivariant: für alle $x \in S^{n-1}$, $\kappa \in SO(n)$, $v \in T_{\kappa^{-1}x}S^{n-1}$ und $u \in \Gamma(h_{n,k}^* TS^{d(n,k)-1})$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\kappa_* v}(\tau_\kappa u(x)) = \partial_{\kappa_* v}(\tau_\kappa u)(x) - \langle h_{n,k}(x), \partial_{\kappa_* v}(\tau_\kappa u)(x)\rangle h_{n,k}(x)\\
&= \partial_{\kappa_* v}(\kappa u)(\kappa^{-1}x) - \langle h_{n,k}(x), \partial_{\kappa_* v}(\kappa u)(\kappa^{-1}x)\rangle h_{n,k}(x)\\
&= \kappa\partial_v u(\kappa^{-1}x) - \langle h_{n,k}(x), \kappa\partial_v u(\kappa^{-1}x)\rangle h_{n,k}(x)\\
&= \kappa\partial_v u(\kappa^{-1}x) - \langle \kappa^{-1}h_{n,k}(x), \partial_v u(\kappa^{-1}x)\rangle h_{n,k}(x)\\
&= \kappa\partial_v u(\kappa^{-1}x) - \langle h_{n,k}(\kappa^{-1}x), \partial_v u(\kappa^{-1}x)\rangle \kappa h_{n,k}(\kappa^{-1}x)\\
&= \kappa(\partial_v u(\kappa^{-1}x) - \langle h_{n,k}(\kappa^{-1}x), \partial_v u(\kappa^{-1}x)\rangle h_{n,k}(\kappa^{-1}x))\\
&= \kappa\nabla_v u(\kappa^{-1}x) = \tau_\kappa \nabla_v u(x).
\end{aligned}\tag{3.1}$$

$SO(n)$ wirkt transitiv auf S^{n-1}, der einzige Orbit dieser Gruppenoperation ist demnach die gesamte Mannigfaltigkeit S^{n-1}. Wir haben demnach eine Vektorbündel mit Gruppenoperation der Kohomogenität 0 gefunden, die (mindestens) einen äquivarianten Zusammenhang zulässt.

3.2.2 Gruppenoperation der Kohomogenität $\leqslant 4$

Sei nun $\ell \leqslant 4$, $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N}$, $n := \sum_{i=1}^\ell n_i$ und $m := \sum_{i=1}^\ell d(n_i, k_i)$. Zu jedem $x \in S^{n-1}$ gibt es dann $a_1, \dots a_\ell \geqslant 0$ mit $\sum_{i=1}^\ell a_i^2 = 1$, sodass

$$x = (a_1 x_1, \dots, a_\ell x_\ell).$$

(Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die x_i mit $a_i = 0$.)

Definiere nun $h : S^{n-1} \to S^{m-1}$ durch

$$h(a_1 x_1, \dots, a_\ell x_\ell) := (a_1 h_{n_1,k_1}(x_1), \dots, a_\ell h_{n_\ell,k_\ell}(x_\ell)).$$

(Da $h_{n_i,k_i}(x_i) \in S^{d(n_i,k_i)-1}$ für alle $i \in \{1, \dots, \ell\}$, ist

$$|(a_1 h_{n_1,k_1}(x_1), \dots, a_\ell h_{n_\ell,k_\ell}(x_\ell))| = 1$$

und somit die rechte Seite tatsächlich in S^{m-1} enthalten.)

Wie zuvor betrachten wir das zurückgezogene Vektorbündel $h^*(TS^{m-1})$ über S^{n-1}. Jedes Element von $h^*(TS^{m-1})$ kann man identifizieren mit einem Tupel

$$((x_1, v_1), (x_2, v_2) \dots, (x_\ell, v_\ell))$$

mit $x_i \in S^{n_i-1}$ und $v_i \in T_{h_{n_i,k_i}(x_i)} S^{d(n_i,k_i)-1}$ für $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Wegen $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_\ell}$ operiert $K := SO(n_1) \times \cdots \times SO(n_\ell)$ natürlicherweise auf S^{n-1} (als Produkt der Operationen von $SO(n_i)$ auf $\mathbb{R}^{n_i}$).
Weiterhin gibt es eine K-Operation auf $h^*(TS^{m-1})$: Für

$$T = (T_1, \ldots, T_\ell) \in SO(n_1) \times \ldots \times SO(n_\ell)$$

definiere

$$T\left((x_1, v_1), (x_2, v_2) \ldots, (x_\ell, v_\ell)\right) := \left(T(x_1, v_1), T(x_2, v_2) \ldots, T(x_\ell, v_\ell)\right),$$

wobei $T(x_i, v_i) = (Tx_i, T_* v_i)$, wie oben erklärt.

Unter dieser Operation ist die Abbildung h K-äquivariant:

$$\begin{aligned}
&h(T(a_1x_1, \ldots, a_\ell x_\ell)) = h(a_1T_1x_1, \ldots, a_\ell T_\ell x_\ell) \\
&= (a_1 h_{n_1,k_1}(T_1x_1), \ldots, a_\ell h_{n_\ell,k_\ell}(T_\ell x_\ell)) \\
&= (a_1 T_1 h_{n_1,k_1}(x_1), \ldots, a_\ell T_\ell h_{n_\ell,k_\ell}(x_\ell)) \\
&= T(a_1 h_{n_1,k_1}(x_1), \ldots, a_\ell h_{n_\ell,k_\ell}(x_\ell)) \\
&= Th(a_1x_1, \ldots a_\ell x_\ell).
\end{aligned}$$

Sei ∇^{LC} die aus dem Levi-Civita-Zusammenhang kommende kovariante Ableitung auf TS^{m-1} und $\nabla := h^*\nabla_{LC}$ die unter h zurückgezogene kovariante Ableitung auf $h^*(TS^{m-1})$. Dann ist ∇ K-äquivariant: Da in Rechnung 3.1 nur die Äquivarianz der zurückziehenden Abbildung $h_{n,k}$ verwendet wurde, kann man die Rechnung direkt übertragen, indem man $h_{n,k}$ durch die K-äquivariante Abbildung h ersetzt.

Die Schreibweise $x = (a_1x_1, \ldots, a_\ell x_\ell)$ der Elemente von S^{n-1} führt direkt zu einer Beschreibung von S^{n-1}/K als

$$S^{n-1}/K \simeq \left\{(a_1, \ldots, a_\ell) \in \mathbb{R}^\ell : a_i \geqslant 0 \text{ für alle } j \text{ und } \sum_{i=1}^{\ell} a_i^2 = 1\right\},$$

da $SO(n_i)$ transitiv auf S^{n_i-1} wirkt (für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$).
Demnach ist $\dim(S^{n-1}/K) = \ell - 1$; die Kohomogenität der K-Operation auf S^{n-1} ist demnach $\ell - 1$.

Alle Punkte $(a_1x_1, \ldots, a_\ell x_\ell)$, bei welchen $a_i > 0$ ist für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, haben den Isotropietyp $SO(n_1-1) \times \ldots \times SO(n_\ell - 1)$ (da jedes der $x_i \in S^{n_i-1}$ unter der Wirkung einer zu $SO(n_i - 1)$ konjugierten Untergruppe von $SO(n_i)$ konstant ist). Da es sich bei den entsprechenden Orbits um innere Punkte des Orbitraums handelt, haben wir es mit Hauptorbits zu tun.

Bis zu $\ell - 1$ Stück der Koeffizienten a_i können gleich 0 sein. Bei den entsprechenden Orbits handelt es sich um Randpunkte des Orbitraums und daher um Ausnahmeorbits oder singuläre Orbits. Die entsprechenden Isotropietypen erhält man, wenn man in

$SO(n_1 - 1) \times \ldots \times SO(n_\ell - 1)$ alle Komponenten $SO(n_i - 1)$ mit $a_i = 0$ durch $SO(n_i)$ ersetzt.

Falls $\ell - 1 \leqslant 4$, also $\ell \leqslant 5$ ist, erhalten wir ein Beispiel einer Gruppenoperation auf ein Vektorbündel mit Kohomogenität $\ell - 1 \leqslant 4$ (welche, wie oben gezeigt, mindestens eine äquivariante kovariante Ableitung zulässt).

Die Hauptorbits der K-Operation haben in diesem Fall also Kodimension 4 (da dann die Dimension des Orbitraums $\dim(S^{n-1}/K) = \ell - 1 = 4$ ist).
Weiterhin gibt es jeweils eine $(4 - \sharp\{j : a_j = 0\})$-dimensionale Schar von Orbits der Kodimension $4 + \sum_{j:a_j=0}(n_j - 1)$.

Demnach hat die Vereinigung aller singulären Orbits die Hausdorff-Dimension

$$n - \min\{n_\alpha : \alpha \in \{1, \ldots, 5\}\}.$$

Setzt man zusätzlich voraus, dass $\min\{n_j\} \geqslant 4$, so ist die Hausdorff-Dimension der Vereinigung aller singulären Orbits $\leqslant n - 4$, wie in dieser Arbeit gefordert.

In [Bau09] (Beispiel 3.4., Seite 82f) wird erläutert, dass für jede Mannigfaltigkeit M die Menge der kovarianten Ableitungen des Tangentialbündels TM äquivalent ist zur Menge der Zusammenhänge des Reperbündels $GL(M)$.

Insbesondere gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der kovarianten Ableitungen von TS^{m-1} und der Menge der Zusammenhänge des Reperbündels $GL(S^{n-1})$; somit gibt es auch eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der kovarianten Ableitungen von $h^*(TS^{m-1})$ und der Menge der Zusammenhänge des Reperbündels $h^*GL(S^{m-1})$.

Somit haben wir die Existenz eines K-äquivarianten Zusammenhangs des Prinzipalfaserbündels $h^*GL(M)$ gezeigt.

Ist $k_i = 1$ für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, so ist $h \equiv id$ und somit $h^*(TS^{m-1}) = TS^{m-1}$; dieses Beispiel ist für die vorliegende Arbeit jedoch nicht interessant, da man beim Minimieren des Yang-Mills-Funktionals in diesem Fall den Levi-Civita-Zusammenhang erhält; der äquivariante Ansatz hat unter diesem Voraussetzungen also keine Vorteile.

4 Ein äquivarianter Eichsatz

Wie bereits erwähnt, ist das Yang-Mills-Funktional aufgrund seiner Eichinvarianz nicht koerziv, man kann es jedoch unter bestimmten Voraussetzungen lokal auf kleinen Kugeln "koerziv machen" durch die Anwendung eines Eichsatzes. Eine passende Variante eines solchen Eichsatzes muss also bewiesen werden, um damit die für die direkte Methode der Variationsrechnung nötige Koerzivität zu erreichen.

Grundlage für den benötigten Eichsatz ist der folgende Eichsatz aus [MR03], Theorem 1.3 (Seite 199):

Satz 4.0.1 (Eichsatz aus [MR03] für glatte Zusammenhangsformen)**.** *Sei $m \geqslant 4$ und $G \subset SO(\tilde{\ell})$ für ein $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$.*

Dann gibt es Konstanten $\kappa(m)$ und $C(m)$ (die nur von m abhängen), sodass gilt: Für jede glatte 1-Form $\bar{A} \in C^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ mit $\|F_{\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant \kappa(m)$ gibt es eine Eichtransformation $\bar{\sigma} \in W^{2,2}_4(B^m, G)$ mit

$$(\bar{\sigma}^*\bar{A})_x(x) \equiv 0 \quad \textit{auf } \partial B^m,$$

$$d^*(\bar{\sigma}^*\bar{A}) \equiv 0 \quad \textit{auf } B^m$$

und

$$\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W^{1,2}_4(B^m)} \leqslant C(m)\|F_{\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)}$$

(wobei $\bar{\sigma}^*\bar{A} = \bar{\sigma}^{-1}d\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{-1}\bar{A}\bar{\sigma}$). Man sagt, wenn $\bar{\sigma}^*\bar{A}$ die obigen Bedingungen erfüllt, auch, $\bar{\sigma}^*\bar{A}$ sei in Coulomb-Eichung.

(Der Eichsatz in [MR03] ist außerdem anwendbar auf approximierbare, nicht glatte $W^{1,2}_4$-Formen, was mit etwas Mehraufwand auch auf unser Resultat übertragbar ist; zur Erleichterung der Notation und da der Eichsatz in dieser Arbeit lediglich auf glatte Zusammenhangsformen angewandt wird, beschränkt diese Arbeit sich auf solche.
Ein analoges Resultat wurde unabhängig zeitgleich in [TT04], Theorem 4.6, (Seite 570) gezeigt.)

In [MR03] ist der Morrey-Raum $W^{1,2}_4(B^m; \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ das richtige Setting, da dort stabile YM-Zusammenhänge geeicht werden sollen. Im Zusammenhang dieser Arbeit werden keine stabilen YM-Zusammenhänge betrachtet, aber auch äquivariante $W^{k,p}$-Funktionen liegen, wie in Lemma 2.2.7 gesehen, auf jeder Teilmenge von M, die positiven Abstand zu allen Orbits von zu hoher Kodimension haben, in Morrey-Räumen.

Daher kann man dort den Satz aus [MR03] ohne weitere Arbeit auf die hier betrachteten äquivarianten Zusammenhangsformen anwenden, sofern diese die Kleinheitsbedingung an die Krümmung erfüllen. Er liefert jedoch nur eine Existenzaussage über die Eichtransformation σ; dabei ist nicht klar, ob die erhaltene Eichtransformation (und somit auch die umgeeichte Zusammenhangsform) selbst wieder K-äquivariant ist.

Da für das Ziel dieser Arbeit die K-Äquivarianz des umgeeichten Zusammenhangs essentiell ist, muss der vorliegende Satz also angepasst werden. Es stellt sich heraus, dass dabei (zumindest beim hier verwendeten Vorgehen) die Coulomb-Bedingungen

$$(\bar{\sigma}^* \bar{A})_x(x) \equiv 0 \quad \text{auf } \partial B^m,$$

$$d^*(\bar{\sigma}^* \bar{A}) \equiv 0 \quad \text{auf } B^m$$

aufgegeben werden müssen.

Gezeigt werden soll in diesem Abschnitt genauer:

Satz 4.0.2 (K-äquivarianter, glatter Eichsatz)**.** *Sei (unter den Generalvoraussetzungen) $x_0 \in M$ mit $\dim(Kx_0) \geqslant m-4$ und sei $B := B_r^M(x_0) \subset M$ (mit $r \in (0, \rho^*(x_0))$) eine geodätische Kugel in M.*

Dann gibt es Konstanten ε_{eich} und C_{eich}, welche nur von adP und K abhängen, sodass gilt:
Zu jedem glatten K-äquivarianten Referenzzusammenhang D und jeder glatten K-äquivarianten 1-Form $A \in \Omega^1(adP)$ mit $\|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(B)} \leqslant \varepsilon_{eich}$ gibt es eine K-äquivariante Eichtransformation $\sigma \in W_4^{2,2}\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$, sodass

$$\|\sigma^* A\|_{W_4^{1,2}(T^r(Kx_0))} \leqslant C_{eich} \|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}.$$

Um diesen Satz zu beweisen, wird die folgende Strategie verfolgt:

- **Existenz einer K_{x_0}-äquivarianten Eichtransformation im flachen Fall (Abschnitt 4.1):** In Abschnitt 2.2.3 wurden Operationen der Isotropiegruppe K_{x_0} auf einer kleinen Umgebung von x_0 eingeführt. Zeige, dass bei K_{x_0}-äquivarianten Anfangsdaten auf $\mathbb{R}^m$ die aus Satz 4.0.1 erhaltene Eichtransformation automatisch auch K_{x_0}-äquivariant ist.
- **Anpassung auf Mannigfaltigkeiten (Abschnitt 4.2):** Übertrage diesen K_{x_0}-äquivarianten, flachen Eichsatz mittels Parametrisierung und lokaler Trivialisierung auf $adP|_{\phi(B^m)}$.
- **Auswahl einer Scheibe (Abschnitt 4.3):** Die aus diesem Eichsatz erhaltene Eichtransformation ist dann schon in $W_4^{2,2}(\phi^{-1}U)$. Finde eine Scheibe $S \subset U$, sodass $\sigma_1 \in W^{2,2}(S)$.

- **Äquivariante Fortsetzung auf den Schlauch (Abschnitt 4.4):** Setze die K_{x_0}-äquivariante Eichtransformation $\sigma_1|_S$ fort zu einer K-äquivarianten Eichtransformation σ auf $T^r(Kx_0)$. Zeige, dass $\sigma \in W_4^{2,2}(T^r(Kx_0))$.

4.1 Existenz einer K_{x_0}-äquivarianten Eichtransformation im flachen Fall

Sei $A \in \Omega^1(adP)$ eine K-äquivariante Zusammenhangsform auf M. Dann ist A für jedes $x_0 \in M$ auch K_{x_0}-äquivariant im Sinne von Abschnitt 2.2.3 auf der Umgebung von x_0, auf welcher diese K_{x_0}-Operation definiert ist.
Denn für alle $k \in K_{x_0}$, $z \in U \subset Kx_0$, $y \in S_z^r$ und $u \in T_yM$ gilt:

$$A_{\tilde{k}_* u}(\tilde{k}y) = A_{(\kappa_z k \kappa_z^{-1})_* u}(\kappa_z k \kappa_z^{-1} y) = \lambda_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}} A_u(y) \lambda^{-1}_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}} = \tilde{\lambda}_k A(x)_u \tilde{\lambda}_k^{-1}.$$

Weiterhin sind die K_{x_0}-Operationen auf die trivialisierten Bündel gerade so definiert, dass K_{x_0}-Äquivarianz von A auf $U \subset T^\rho(Kx_0)$ äquivalent ist zu K_{x_0}-Äquivarianz von $\bar{A} := \phi^*(\psi \circ A) \in C^\infty(B_\rho^{m-\ell}(0) \times B_\rho^\ell(0), \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^m)$.
Analog ist K_{x_0}-Äquivarianz einer Eichtransformation $\sigma \in \Gamma(P \times_c G)$ auf $U \subset T^\rho(Kx_0)$ äquivalent zu K_{x_0}-Äquivarianz von $\bar{\sigma} := \psi^{P \times_c G} \circ \sigma \circ \phi \in C^\infty(B_\rho^{m-\ell}(0) \times B_\rho^\ell(0), G)$.

Beweise zunächst:

Lemma 4.1.1 (Äquivarianz zu Satz 4.0.1)**.** *Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $G \subset SO(\mathbb{R}^{\tilde{\ell}})$ für ein $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$.*
Sei H eine kompakte Lie-Gruppe, die (von links) durch Isometrien auf $B^m \times \mathfrak{g}$ und auf $B^m \times G$ operiert; für diese Operationen gelte:

$$pr_1(h \cdot (x, v)) = h \cdot x \quad \text{und} \quad pr_1(h \cdot (x, g)) = h \cdot x.$$

Wir bezeichnen $\bar{A} \in C^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^m)$ als H-äquivariant, wenn für alle $x \in B^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ und $h \in H$ gilt:

$$h^{-1} \cdot (hx, (h^* \bar{A})_u(x)) = (x, \bar{A}_u(x));$$

analog bezeichnen wir $\bar{\sigma} \in C^\infty(B^m, G)$ als H-äquivariant, wenn für alle $x \in B^m$ und $h \in H$ gilt:

$$h^{-1} \cdot (hx, \bar{\sigma}(hx)) = (x, \bar{\sigma}(x)).$$

Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_{eich}(m)$ und $C_{eich}(m)$, sodass gilt:
Zu jeder H-äquivarianten Form $\bar{A} \in C^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^m)$ mit $\|F_{d+\bar{A}}\|_{L_4^2(B^m)} \leqslant \varepsilon'_{eich}$ gibt es eine H-äquivariante Eichtransformation $\bar{\sigma} \in W_4^{2,2}(B^m, G)$, sodass gilt:

$$(\bar{\sigma}^* \bar{A})_x(x) \equiv 0 \quad \text{auf } \partial B^m,$$

$$d^*(\bar{\sigma}^*\bar{A}) \equiv 0 \quad \textit{auf } B^m$$

und

$$\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W_4^{1,2}(B^m)} \leqslant C_{eich}\|F_{d+\bar{A}}\|_{L_4^2(B^m)}$$

(für $\bar{\sigma}^*\bar{A} = \bar{\sigma}^{-1}d\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{-1}\bar{A}\bar{\sigma}$).

Beweis. Wir orientieren uns am Beweis von Theorem 1.3 in [MR03] (Seite 205ff). Dabei gehen wir die einzelnen Beweisschritte durch und weisen nach, dass die Äquivarianz unserer Anfangsdaten darin erhalten bleibt beziehungsweise vererbt wird an die dort erhaltene Eichtransformation.

Für $\alpha > 0$ wollen wir also zunächst das H-äquivariante Analogon zu Theorem 3.7 in [MR03] (Seite 205) zeigen; dieses entspricht dem hier zu zeigenden Lemma 4.1.1, wenn man alle Morrey-Sobolev-Räume und Normen $W_4^{k,p}$ durch $W_{4-\alpha}^{k,p}$ ersetzt.
Der Fall $\alpha = 0$ lässt sich dann in völliger Analogie zu [MR03] (Seite 210, "The case $\alpha = 0$") folgern.

Bezeichne eine Zusammenhangsform $\bar{A} \in C^\infty(B^m, \mathfrak{g}\otimes\wedge^1\mathbb{R}^m)$ als H-äquivariant C_{eich}-Uhlenbeck-eichbar, wenn es eine H-äquivariante Eichtransformation $\bar{\sigma} \in W_{4-\alpha}^{2,2}(B^m, G)$ gibt, sodass gilt:

$$(\bar{\sigma}^*\bar{A})_x(x) \equiv 0 \quad \text{auf } \partial B^m,$$

$$d^*(\bar{\sigma}^*\bar{A}) \equiv 0 \quad \text{auf } B^m$$

und

$$\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W_{4-\alpha}^{1,2}(B^m)} \leqslant C_{eich}\|F_{\bar{A}}\|_{L_{4-\alpha}^2(B^m)}.$$

Sei

$$\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}} := \{\tilde{A} \in W_{4-\alpha}^{1,2}(B^m) \text{ H-äquivariant und glatt, sodass } \|F_{\tilde{A}}\|_{L_{4-\alpha}^2(B^m)} < \varepsilon_{eich}\}$$

(in Analogie zu $\mathfrak{S}_\kappa^\alpha$ in [MR03], Seite 205), sei $\alpha > 0$ und

$$S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}} := \{A \in \mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}} : A \text{ ist } H\text{-äquivariant } C_{eich}\text{-Uhlenbeck-eichbar}\}.$$

Zeige: $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$ ist wegzusammenhängend (also insbesondere zusammenhängend) in der Topologie von $W_{4-\alpha}^{1,2}(B^m)$. Der Beweis aus [MR03] (Beweis zu Lemma 3.3, Seite 206) ist unmittelbar auf unsere Situation übertragbar, da für H-äquivariante $A \in W_4^{1,2}(B^m)$ auch A_t (definiert durch $A_t(x) := tA(tx)$) H-äquivariant ist.

Zeige: $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$ für ε_{eich} hinreichend klein und C_{eich} hinreichend groß. Das entspricht Lemma 3.4 in [MR03] (Seite 207). Lemma 3.5 und Lemma 3.5, die in dessen Beweis verwendet werden, liefern Abschätzungen, die unabhängig von Äquivarianz gelten und können daher direkt übernommen werden. Bemerke lediglich zusätzlich, dass Äquivarianz unter Grenzwertbildung in $W_{4-\alpha}^{1,2}$ erhalten bleibt.

Zeige: $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}}$ ist offen in $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$ für ε_{eich} hinreichend klein und C_{eich} hinreichend groß. Sei $\bar{A} \in S^{\ell-\alpha}_{\varepsilon_{eich}}$. Zu zeigen ist, dass es eine Umgebung von $\bar{A}$ in $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$ gibt, die ganz in $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}}$ enthalten ist. Dafür müssen wir zeigen, dass es für $\bar{A}+a$ (für jedes H-äquivariante $a \in W^{1,2}_{4-\alpha}(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ mit $\|a\|_{W^{1,2}_{4-\alpha}(B^m)}$ hinreichend klein eine *H-äquivariante* Eichtransformation σ_a gibt, sodass $\sigma_a^*(A+a)$ in Uhlenbeck-Eichung ist (also obige Bedigungen erfüllt). Dies entspricht Lemmata 3.7 und 3.8 (Seite 211) in [MR03], bis auf die folgenden Anpassungen:

- Wir müssen dafür Lemma 2.6 in [Uhl82a] auf unsere Situation anpassen (dieses wird im Beweis von Lemma 3.8 in [MR03] zitiert); wir wollen zeigen, dass es einen linearen Operator $P : W^{1,2}_4(B^m, \mathfrak{g}) \to W^{2,2}_4(B^m, \mathfrak{g})$ gibt, sodass Pf für H-äquivariante f wieder H-äquivariant ist und sodass für jedes $f \in W^{1,2}_4(B^m)$ gilt: $Pf|_{S^{n-1}} = 0$, $d_x(Pf)|_{S^{n-1}} = f|_{S^{n-1}}$.
  Analog zu [Uhl82a], Lemma 2.6 (Seite 36) konstruiere P folgendermaßen:
  Ist $f \in W^{1,2}_4(B^m \setminus \{0\})$, so hat das Problem zur inhomogenen Wärmeleitungsgleichung (in Polarkoordinaten formuliert; mit r als Zeit und S^{m-1} als Raum)
  $$(\star)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}u(r,\omega) - \Delta_\omega u(r,\omega) = f & \text{für } \frac{1}{4} < r \leqslant 1 \\ u(1,\omega) = 0 & \text{für } \omega \in S^{m-1}. \end{cases}$$
  eine eindeutige Lösung $u \in W^{2,2}_4(B^m \setminus B^m_{1/4}, \mathfrak{g})$. (Der entsprechende Lösungsoperator $E : f \mapsto u$ ist ein stetiger linearer Operator
  $$E : W^{1,2}_{4-\alpha}(B^m, \mathfrak{g}) \to W^{2,2}_{4-\alpha}(B^m \setminus B^m_{1/4}, \mathfrak{g});$$
  die Anpassung auf Morrey-Räume übernehmen wir hierbei aus [MR03], Seite 212.)
  Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von $(\star)$ muss $u = Ef$ für jedes H-äquivariante f auch wieder H-äquivariant sein: Angenommen, es gäbe ein $h_0 \in H$ und ein $(r_0, \omega_0) \in B^m \setminus B^m_{1/4}$, sodass $h_0^{-1} \cdot u(h_0 \cdot (r_0, \omega_0)) \neq u(r_0, \omega_0)$. Definiert man dann $u_1(r,\omega) := pr_2(h_0^{-1}(h_0(r,\omega), u(h_0(r,\omega))))$, so ist $u_1(r_0,\omega_0) \neq u(r_0,\omega_0)$ und daher $u_1 \neq u$; aber auch u_1 wäre eine Lösung von $(\star)$, denn:
  $$\begin{aligned} &((r,\omega), \frac{\partial}{\partial r}u_1(r,\omega) + \Delta_{S^{m-1}}u_1(r,\omega)) \\ &= \left((r,\omega), \frac{\partial}{\partial r}(pr_2(h_0^{-1}(h_0(r,\omega), u(h_0(r,\omega))))) + \Delta_{S^{m-1}}(pr_2(h_0^{-1}(h_0(r,\omega), u(h_0(r,\omega)))))\right) \\ &= h_0^{-1}\left(h_0(r,\omega), \frac{\partial}{\partial r}u(h_0(r,\omega)) + \Delta_{S^{m-1}}u(h_0(r,\omega))\right) \\ &= h_0^{-1}(h_0(r,\omega), f(h_0(r,\omega))) \\ &= ((r,\omega), f(r,\omega)) \end{aligned}$$
  für alle $(r,\omega) \in B^m \setminus B^m_{1/4}$ (da $H \hookrightarrow \{id_{\mathbb{R}^{m-\ell}} \otimes O(\ell)\}$ und da f H-äquivariant ist) und damit
  $$\frac{\partial}{\partial r}u_1(r,\omega) + \Delta_{S^{m-1}}u_1(r,\omega) = f(r,\omega).$$

Das wäre ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösung von ($\star$); daher muss u selbst H-äquivariant sein.
Sei nun $\phi \in C^\infty(B^m)$ eine H-äquivariante (zum Beispiel radialsymmetrische) $\frac{1}{4}$-$\frac{1}{2}$-Abschneidefunktion. Dann ist $Pf := \phi \cdot Ef$ (fortgesetzt durch 0 auf $B^m_{1/4}$) für jedes H-äquivariante f auch wieder H-äquivariant und

$$P : W_4^{1,2}(B^m) \to W_4^{2,2}(B^m)$$

ist ein stetiger, linearer Operator.

- $\{A \in W_4^{1,2}(B^m) : A \text{ ist } H\text{-äquivariant}\}$ ist eine Banach-Mannigfaltigkeit (da H-Äquivarianz unter Grenzwertbildung in $W_4^{1,2}$ erhalten bleibt); der Satz über implizite Funktionen (siehe zum Beispiel [AMR88]) ist dort also anwendbar.

Damit lässt sich der Beweis der Offenheit von $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}}$ in $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$ direkt übertragen.

Folgerung: Völlig analog zu [Uhl82a] und [MR03]: Da $\mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$ zusammenhängend ist und $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}}$ darin offen und abgeschlossen ist, ist $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}} \in \{\emptyset, \mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}\}$. Da $0 \in S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}}$, ist $S_{\varepsilon_{eich},C_{eich}} = \mathfrak{S}_{\varepsilon_{eich}}$. $\square$

Insbesondere lässt sich Lemma 4.1.1 im Fall $H = K_{x_0}$ anwenden: Laut Abschnitt 2.2.3 gibt es eine Darstellung $K_{x_0} \hookrightarrow \{id_{\mathbb{R}^{m-\ell}}\} \otimes \{O(\mathbb{R}^{m-\ell})\}$ und die dort definierten Gruppenoperationen $\bar{k}$ und $\bar{\lambda}_k$ erfüllen die Voraussetzungen an die H-Operation in Lemma 4.1.1. Demnach folgt:

Korollar 4.1.2 (K_{x_0}-Äquivarianz zu Satz 4.0.1)**.** *Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien G und K wie in den Generalvoraussetzungen (siehe Abschnitt 3.1).*

Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_{eich}(m)$ und $C_{eich}(m)$, sodass gilt:
Zu jedem K_{x_0}-äquivarianten $\bar{A} \in C^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ mit $\|F_{d+\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant \varepsilon_{eich}$ gibt es eine K_{x_0}-äquivariante Eichtransformation $\bar{\sigma} \in W_4^{2,2}(B^m)$, sodass gilt:

$$(\bar{\sigma}^*\bar{A})_x(x) \equiv 0 \quad \textit{auf } \partial B^m,$$

$$d^*(\bar{\sigma}^*\bar{A}) \equiv 0 \quad \textit{auf } B^m$$

und

$$\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W_4^{1,2}(B^m)} \leqslant C_{eich}\|F_{d+\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)}.$$

(für $\bar{\sigma}^*\bar{A} = \bar{\sigma}^{-1}d\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{-1}\bar{A}\bar{\sigma}$).

4.2 Anpassung auf Mannigfaltigkeiten

Sei für $x_0 \in M$ mit $\dim(Kx_0) = m - \ell$ und $r < \rho^*(x_0)$

$$\phi : \mathbb{R}^m \supset B_r^{m-\ell}(0) \times B_r^\ell(0) \to U \subset T^r(Kx_0)$$

eine orbittreue Parametrisierung des Schlauchabschnitts $U \subset T^r(Kx_0) \subset M$ mit $\phi(0) = x_0$ wie in Lemma 2.2.5 und sei

$$\psi : adP|_U \to U \times \mathfrak{g}$$

eine lokale Trivialisierung von adP über U.

Ziel dieses Abschnitts ist:

Lemma 4.2.1 (Anpassung des K_{x_0}-äquivarianten Eichsatzes auf Mannigfaltigkeiten). *Sei $x_0 \in M$ mit $\dim(Kx_0) \geqslant m - 4$ und sei $B := B_r^M(x_0) \subset M$ (mit $r \in (0, 2\rho^*(x_0))$) eine geodätische Kugel in M.*

Dann gibt es Konstanten ε_{eich} und C_{eich}, sodass gilt:
Zu jedem glatten K-äquivarianten Referenzzusammenhang D und jedem K-äquivarianten $A \in \Omega^1(adP|_B)$ mit

$$\|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(B)} \leqslant \varepsilon_{eich}$$

gibt es eine K_{x_0}-äquivariante Eichtransformation $\sigma \in W_4^{2,2}\Gamma((P \times_c G)|_B)$, sodass

$$\|\sigma^* A\|_{W_4^{1,2}(B)} \leqslant C_{eich} \|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}.$$

Beweis. Für die lokalen Trivialisierungen, die hier benötigt werden, ist es sinnvoll, in diesem Beweis einen anderen Referenzzusammenhang zu benutzen: Sei $\tilde{D}$ die äußere kovariante Ableitung, wie sie in Abschnitt 2.1.3 definiert wurde:

$$\tilde{D}_u Y(x) := \psi^{-1}\left(x, \partial_u(\psi_2 \circ Y)(x)\right).$$

$\tilde{D}$ kann man auch anders aufschreiben. Sei $p_2 : M \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die Projektion auf das zweite Argument, dann ist

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_u Y(x) &= \psi^{-1}(x, \partial_u(\psi_2 \circ Y)(x)) \\
&= \psi^{-1}(x, \partial_u(p_2 \circ \psi \circ Y)(x)) \\
&= \psi^{-1}(x, dp_2(\psi(Y_x)) \cdot \partial_u(\psi \circ Y)(x))
\end{aligned}$$

Da pr_2 eine Projektion ist, entspricht $dp_2(x, v)$ für alle $(x, v) \in M \times \mathfrak{g}$ der Projektion $T_x M \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ auf die zweite Komponente, also:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_u Y(x) &= \psi^{-1}(x, \partial_u(\psi_2 \circ Y)(x)) \\
&= \psi^{-1}((\pi_{TM} \otimes id_{\mathfrak{g}})(\partial_u(\psi \circ Y)(x)).
\end{aligned}$$

(Diese Schreibweise ist für das Überprüfen der K_{x_0}-Äquivarianz von $\tilde{D}$ praktischer.)

Zeige, dass $\tilde{D}$ K_{x_0}-äquivariant ist: Definiere dafür (für $k \in K_{x_0}$ und $x \in S^r_{\kappa x_0}$)

$$\tilde{\tau}_k : \Gamma(adP) \to \Gamma(adP)$$

durch

$$\tilde{\tau}_k Y(x) = \tilde{\lambda}_k Y_{\tilde{k}^{-1}x} = \lambda_{\kappa k \kappa^{-1}} Y_{\kappa k \kappa^{-1}x}.$$

Dann ist (da die K_{x_0}-Operation gerade so definiert sind, dass ϕ und ψ K_{x_0}-äquivariant sind)

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_u(\tilde{\tau}_k Y)(x)\\
&= \tilde{D}_u(\tilde{\lambda}_k Y \circ \tilde{k}^{-1})(x)\\
&= \psi^{-1}\left((\pi_{TM} \otimes id_{\mathfrak{g}})(\partial_u(\psi \circ \tilde{\lambda}_k \circ Y \circ \tilde{k}^{-1})(x)\right)\\
&= \psi^{-1}\left((\pi_{TM} \otimes id_{\mathfrak{g}})(\partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi \circ \tilde{\lambda}_k \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)\right)\\
&= \psi^{-1}\left((\pi_{TM} \otimes id_{\mathfrak{g}})(\partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\hat{\lambda}_k \circ \psi \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)\right)\\
&= \psi^{-1}\left((\pi_{TM} \otimes id_{\mathfrak{g}})(d\hat{\lambda}_k(\psi(Y_{\tilde{k}^{-1}x})) \cdot \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)\right).
\end{aligned}$$

Definiere $\hat{\lambda}_k^2 : B \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ als $\hat{\lambda}_k^2 := pr_2 \circ \hat{\lambda}_k$. Wegen der Verträglichkeit der K-Operationen auf M und adP ist demnach $\hat{\lambda}_k(x,v) = (\tilde{k}x, \hat{\lambda}_k^2(x,v))$.
Für alle $x \in B$ ist $\hat{\lambda}_k^2(x,\cdot) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen (siehe Abschnitt 2.2.2).
Also ist (für alle $(x,v) \in B \times \mathfrak{g}$ und alle $(a,w) \in T_xM \times \mathfrak{g}$)

$$d\hat{\lambda}_k(x,v)_{a,w} = (\tilde{k}_* a, \hat{\lambda}_k^2(x,w)).$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&\partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x) = (\partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_1 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x), \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x))\\
&= (\tilde{k}_*^{-1}u, \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)).
\end{aligned}$$

Also ist

$$d\hat{\lambda}_k(x,v) \cdot \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x) = (\tilde{k}_*\tilde{k}_*^{-1}u, \hat{\lambda}_k^2(\tilde{k}^{-1}x, \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)).$$

Damit kann man weiter umformen zu

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_u(\tilde{\tau}_k Y)(x)\\
&= \psi^{-1}\left((\pi_{TM} \otimes id_{\mathfrak{g}})((u, \hat{\lambda}_k^2(\tilde{k}^{-1}x, \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)))\right)\\
&= \psi^{-1}\left(x, \hat{\lambda}_k^2(\tilde{k}^{-1}x, \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x))\right)\\
&= \psi^{-1}\left(\hat{\lambda}_k(\tilde{k}^{-1}x, \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x))\right)\\
&= \bar{\lambda}_k \psi^{-1}\left(\tilde{k}^{-1}x, \partial_{\tilde{k}_*^{-1}u}(\psi_2 \circ Y)(\tilde{k}^{-1}x)\right)\\
&= \tilde{\tau}_k \tilde{D}_u Y(x).
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{D}$ K_{x_0}-äquivariant. Somit ist $\tilde{A} = D + A - \tilde{D}$ ebenfalls K_{x_0}-äquivariant und daher auch $\bar{A}$.

Weiterhin ist für alle $u, v \in T_xM$ und alle $Y \in \Gamma(adP)$

$$\begin{aligned}
&F_{\tilde{D}}Y(x)_{u,v} = \tilde{D}_u(\tilde{D}_vY)(x) - \tilde{D}_v(\tilde{D}_uY)(x)\\
&= \psi^{-1}(x, \partial_u(\psi_2 \circ \tilde{D}_vY(x))) - \psi^{-1}(x, \partial_v(\psi_2 \circ \tilde{D}_uY(x)))\\
&= \psi^{-1}(x, \partial_u\partial_v(\psi_2 \circ Y)(x)) - \psi^{-1}(x, \partial_v\partial_u(\psi_2 \circ Y)(x))\\
&= \psi^{-1}(x, (\partial_u\partial_v - \partial_v\partial_u)(\psi_2 \circ Y)(x)) \qquad (4.1)\\
&= 0. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Da in diesem Beweis nur lokal auf B gerechnet wird, kann man $\tilde{D}$ als Referenzzusammenhang verwenden. Definiere $\tilde{A}$ so, dass

$$D + A = \tilde{D} + \tilde{A},$$

also $\tilde{A} := A + \alpha$ mit $\alpha := D - \tilde{D} \in \Omega^1(adP|_B)$. Offensichtlich ist dann $\tilde{A} \in \Omega^1(adP|_B)$.

Definiere eine zu $\tilde{D}$ kompatible kovariante Ableitung auf $P \times_c G \subset Aut(adP)$ und bezeichne diese ebenfalls mit $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}_vs(x) := s(x)\psi^{-1}(x, \psi_2^{P\times_cG}(s(x))d_u(\psi_2^{P\times_cG} \circ s \circ \phi^{-1})(x))$$

für alle Schnitte $s \in \Gamma(P \times_c G)$. (Zu kovarianten Ableitungen auf $P \times_c G$ siehe Abschnitt 2.1.4.)

Auf $\tilde{D} + \tilde{A}$ soll nun Korollar 4.1.2 angewandt werden: Definiere dafür

$$\bar{A} := (\phi^{-1})^*(\psi_2 \circ \tilde{A}).$$

Dann ist $\bar{A} \in C_\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ und K_{x_0}-äquivariant.
Desweiteren ist (wegen $\tilde{D}_u\tilde{A}(x) = \psi^{-1}(x, d_{\phi_*^{-1}u}\bar{A}(\phi(x)))$)

$$\begin{aligned}
&\|F_{d+\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} = \|d\bar{A} + [\bar{A}, \bar{A}]\|_{L^2_4(B^m)}\\
&= \|d((\phi^{-1})^*(\psi_2 \circ \tilde{A})) + [(\phi^{-1})^*(\psi_2 \circ \tilde{A}), (\phi^{-1})^*(\psi_2 \circ \tilde{A})]\|_{L^2_4(B^m)}\\
&= \|(\phi^{-1})^*(d(\psi_2 \circ \tilde{A}) + [\psi \circ \tilde{A}, \psi_2 \circ \tilde{A}])\|_{L^2_4(B^m)}\\
&\leqslant c(Lip(\phi^{-1}))\|d(\psi_2 \circ \tilde{A}) + [\psi \circ \tilde{A}, \psi_2 \circ \tilde{A}]\|_{L^2_4(\phi(B^m))}\\
&\leqslant c(M)\|\psi_2 \circ (\tilde{D}\tilde{A}) + \psi_2 \circ ([\tilde{A}, \tilde{A}])\|_{L^2_4(B)}\\
&= c(M)\|\psi_2 \circ F_{\tilde{D}+\tilde{A}}\|_{L^2_4(B)}\\
&= c(adP)\|F_{\tilde{D}+\tilde{A}}\|_{L^2_4(B)}\\
&= c(adP)\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Wählt man $\varepsilon_{eich} \leqslant \frac{\varepsilon'_{eich}}{c(adP)}$, so ist

$$\|F_{\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant c(adP)\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)} \leqslant c(adP)\varepsilon_{eich} \leqslant \varepsilon'_{eich}.$$

Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung von Korollar 4.1.2 erfüllt: demnach existiert eine K_{x_0}-äquivariante Eichtransformation $\bar{\sigma} \in W^{2,2}_4(B^m, G)$, sodass

$$\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W^{1,2}_4(B^m)} \leqslant C'_{eich}\|F_{\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant C'_{eich}c(M)\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}.$$

Dabei ist $\bar{\sigma}^*\bar{A}(x) = \bar{\sigma}^{-1}(x)d\bar{\sigma}(x) + \bar{\sigma}^{-1}(x)\bar{A}(x)\bar{\sigma}(x)$.

Definiere jetzt $\sigma \in W^{2,2}_4\Gamma((P \times_c G)|_B)$ durch $\sigma(x) := (\psi^{P\times_c G})^{-1}(x, \bar{\sigma}(\phi^{-1}(x)))$. Wir bezeichnen die Umeichung von $\tilde{A}$ mit σ bezüglich des Referenzzusammenhangs $\tilde{D}$ mit $\sigma^{\tilde{*}}\tilde{A}_u(x) := \sigma(x)^{-1}\tilde{D}_u\sigma(x) + \sigma(x)^{-1} \circ A_u(x) \circ \sigma(x)$. Dann folgt mit der Rechnung (2.1) aus Abschnitt 2.1.4:

$$\begin{aligned}&\sigma^{\tilde{*}}\tilde{A}_u(x) = \sigma(x)^{-1}\tilde{D}\sigma(x) + \sigma(x)^{-1}\tilde{A}_u(x)\sigma(x)\\ &\quad = \psi^{-1}(x, (\phi^{-1})^*(\bar{\sigma}^{-1}d_u\bar{\sigma})(x)) + \psi^{-1}(x, (\phi^{-1})^*(\bar{\sigma}^{-1}\bar{A}\bar{\sigma})(x)).\end{aligned}$$

Und demnach:

$$\begin{aligned}&\|\sigma^*A\|_{L^2_4(B)} = \|\sigma^{-1}D\sigma + \sigma^{-1}A\sigma\|_{L^2_4(B)} = \|\sigma^{-1}(\tilde{D}+\alpha)\sigma + \sigma^{-1}(\tilde{A}-\alpha)\sigma\|_{L^2_4(B)}\\ &= \|\sigma^{-1}\tilde{D}\sigma + \sigma^{-1}\tilde{A}\sigma\|_{L^2_4(B)} = \|\sigma^{\tilde{*}}\tilde{A}\|_{L^2_4(B)}\\ &= \|\psi^{-1}(\cdot, (\phi^{-1})^*(\bar{\sigma}^*\bar{A}))\|_{L^2_4(B)} \leqslant c(adP)\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant c(adP)\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W^{1,2}_4(B^m)}\\ &\leqslant C_{eich}c(adP)\|F_{\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant C_{eich}c(adP)\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}\end{aligned}$$

sowie für alle $v \in \Gamma(TM)$ mit $|v| \equiv 1$

$$\begin{aligned}&\|\tilde{D}_v(\sigma^*A)\|_{L^2_4(B)} = \|\tilde{D}_v(\psi^{-1}(\cdot, (\phi^{-1})^*(\bar{\sigma}^*\bar{A})))\|_{L^2_4(B)} = \|\psi^{-1}(\cdot, (\phi^{-1})^*(d_v(\bar{\sigma}^*\bar{A})))\|_{L^2_4(B)}\\ &\leqslant c(adP)\|d_{\phi^{-1}_* v}(\bar{\sigma}^*\bar{A})\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant c(adP)\|\bar{\sigma}^*\bar{A}\|_{W^{1,2}_4(B^m)}\\ &\leqslant C_{eich}c(adP)\|F_{\bar{A}}\|_{L^2_4(B^m)} \leqslant C_{eich}c(adP)\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}.\end{aligned}$$

Also ist $\|\sigma^*A\|_{W^{1,2}_4(B)} \leqslant c(adP)\|\sigma^*A\|_{W^{1,2,(\tilde{D})}_4(B)} \leqslant C_{eich}c(adP)\|F_{D+A}\|_{L^2_4(B)}$
(denn Morrey-Sobolev-Normen bezüglich unterschiedlicher Referenzzusammenhänge sind äquivalent, siehe Abschnitt 2.1.5). □

4.3 Auswahl einer Scheibe

Als nächster Zwischenschritt soll hier gezeigt werden:

Lemma 4.3.1 (Gute Scheibe). *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.0.2 gibt es ein $z \in Kx_0$, sodass $\sigma \in W^{2,2}(S_z^r)$ und*

$$\|\sigma^* A\|^2_{W_4^{1,2}(S_z^r)} \leqslant \frac{c(M,K)}{r^{m-\ell}} \|F_{D+A}\|^2_{L_4^2(B_{2r}^M(x_0))}.$$

Beweis. Seien $x_0 \in M$ (mit $\dim(Kx_0) \geqslant m-4$) und $r < \rho^*(x_0)$ so gewählt, dass $\|F_{D+A}\|^2_{L_4^2(\bar{B})} < \varepsilon_{eich}$ für $\bar{B} := B_{2r}^M(x_0) \subset M$ ist. Dann gibt es nach Satz 4.2.1 also eine Eichtransformation $\sigma \in (W_4^{2,2} \cap W_4^{1,4})\Gamma(P \times_c G)$, die K_{x_0}-äquivariant ist und für die gilt:

$$\|\sigma^* A\|_{W_4^{1,2}(B_{2r}^M)} \leqslant C \|F_{D+A}\|_{L_4^2(B_{2r}^M)}.$$

Sei $Z := \bigcup_{y \in Kx, S_y^r \subset \bar{B}} S_y^r$. Ziel in diesem Abschnitt ist, die Existenz eines $z \in Kx_0 \cap Z$ nachzuweisen, für das $\sigma \in W_4^{2,2}(S_z^r)$ und $\|\sigma^* A\|^2_{L_4^2(S_z^r)} \leqslant c\|F_{D+A}\|^2_{L_4^2(\bar{B})}$. Da die Kohomogenität der K-Operation auf M höchstens 4 ist, ist $L_4^2(S_z^r) = L^2(S_z^r)$. Demnach sind die Forderungen an z äquivalent zu:

- $\|\sigma^* A\|^2_{W^{1,2}(S_z^r)} \leqslant c\|F_{D+A}\|^2_{L^2(\bar{B})}$,
- $\sigma \in W^{2,2}(S_z^r)$.

Diese Forderungen kann man wiederum direkt umschreiben zu

- $\|\sigma^* A\|^2_{L^2(S_z^r)} \leqslant c\|F_{D+A}\|^2_{L^2(\bar{B})}$,
- $\|J^D(\sigma^* A)\|^2_{W^{1,2}(S_z^r)} \leqslant c\|F_{D+A}\|^2_{L^2(\bar{B})}$,
- $\|\sigma\|_{L^2(S_z^r)} < \infty$, $\|J^D\sigma\|_{L^2(S_z^r)} < \infty$ und $\|(J^D)^2\sigma\|_{L^2(S_z^r)} < \infty$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,m\}$.

(Wie bereits an anderen Stellen bezeichnet J^D dabei die totale Ableitung bezüglich des Referenzzusammenhangs D.)

Zur Abschätzung dieser Normen soll die Koflächenformel verwendet werden: sei dafür $f : Z \to Kx_0$ die Projektion auf den "Mittelorbit" entlang der Scheiben. Für die normale Jacobische J_f von f gilt:

$$J_f(x) \leqslant Lip(f)^m = Lip((f \circ \phi) \circ \phi^{-1})^m \leqslant Lip(f \circ \phi)^m Lip(\phi^{-1})^m = Lip(\phi^{-1})^m \leqslant c(M)$$

für alle $x \in Z$ (das folgt mit Hilfe von Satz 2.2.4: da $Z \subset B^M_{2\rho^*(x_0)}(x_0)$ ist, erhält man $\mathrm{dist}(x, M(> Kx_0)) > 2\rho^*(x_0)$).

Mit Hilfe der Koflächenformel kann man daraus für jedes $\gamma > 0$ folgern:

$$\begin{aligned}
&C_{eich}^2 \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})} \geqslant \|\sigma^* A\|^2_{W^{1,2}_4(\bar{B})} \geqslant \|\sigma^* A\|^2_{L^2(\bar{B})} \geqslant \|\sigma^* A\|^2_{L^2(Z)} \\
&= \int_Z |\sigma^* A|^2 \, dx \geqslant c(M) \int_Z |\sigma^* A|^2 J_f(x) \, dx \\
&\overset{\text{Koflächenformel}}{=} c(M) \int_{Kx_0 \cap Z} \int_{S^r_x} |\sigma^* A(y)|^2 \, dy \, dx \\
&\geqslant c(M) \int_{\{x \in Kx_0 \cap Z : \|\sigma^* A\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})}\}} \|\sigma^* A\|^2_{L^2(S^r_x)} \, dx \\
&\geqslant c(M) \gamma \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})} H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 \cap Z : \|\sigma^* A\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 \cap Z : \|\sigma^* A\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\gamma} c(M).$$

Analog erhält man für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Abschätzungen

$$H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 \cap Z : \|J^D(\sigma^* A)\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\gamma} c(M),$$

$$H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 : \|\sigma\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|\sigma\|^2_{W^{2,2}(\bar{B})} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\gamma} c(M),$$

$$H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 : \|J^D \sigma\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|\sigma\|^2_{W^{2,2}(\bar{B})} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\gamma} c(M),$$

sowie

$$H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 : \|(J^D)^2 \sigma)\|^2_{L^2(S^r_x)} \geqslant \gamma \|\sigma\|^2_{W^{2,2}(\bar{B})} \right\} \right) \leqslant \frac{1}{\gamma} c(M).$$

Insgesamt ergeben diese Abschätzungen, dass

$$\begin{aligned}
&H^{m-\ell} \left(\left\{ x \in Kx_0 \cap Z : \|\sigma^* A\|^2_{W^{1,2}(S^r_x)} < \gamma \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(\bar{B})}, \|\sigma\|^2_{W^{2,2}(S^r_x)} < \gamma \|\sigma\|^2_{W^{2,2}(\bar{B})} \right\} \right) \\
&\geqslant H^{m-\ell}(Kx_0 \cap Z) - \frac{c(M)}{\gamma} \\
&> 0
\end{aligned}$$

für jedes $\gamma > \frac{c(M)}{H^{m-\ell}(Kx_0 \cap Z)} = \frac{c(M,K)}{r^{m-\ell}}$.

Demzufolge gibt es sogar überabzählbar viele $z \in Kx_0 \cap Z$, für die $\sigma \in W^{2,2}(S^r_z)$ und $\|\sigma^* A\|^2_{W^{1,2}(S^r_z)} \leqslant \frac{c(M)}{\rho^*(x_0)^{m-\ell}} \|F_{D+A}\|^2_{L^2_4(S^r_z)}$. Wähle eines davon aus.

$\square$

4.4 Äquivariante Fortsetzung auf den Schlauch

Der äquivariante Eichsatz (Satz 4.0.2) folgt durch äquivariante Fortsetzung der erhaltenen Eichtransformation $\sigma|_{S_z^r}$ auf $T^r(Kx_0)$:

Beweis von Satz 4.0.2.

- Auf S_z^r ist σ nach Konstruktion K_{x_0}-äquivariant (bezüglich der in Abschnitt 2.2.3 definierten K_{x_0}-Operation). Das bedeutet auch, dass σ auf der Scheibe S_z^r äquivariant unter der K_z-Operation ist:
  Sei κ_z wie in der Definition der K_{x_0}-Operation in Abschnitt 2.2.3. Dann ist für jedes $y \in S_z^r$

  $$\sigma(\kappa_z k \kappa_z^{-1} y) = \sigma(\tilde{k} y) = \tilde{\lambda}_k \sigma(y) = \lambda_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}} \circ \sigma(y) \circ \lambda^{-1}_{\kappa_z k \kappa_z^{-1}}.$$

  Da $K_z = K_{\kappa_z x_0} = \kappa_z K_{x_0} \kappa_z^{-1}$, folgt daraus direkt die K_z-Äquivarianz von σ auf S_z^r.

  Daher kann man $\sigma|_{S_z^r}$ K-äquivariant zu einer Abbildung auf $T^r(Kx_0) = T^r(Kz)$ fortsetzen:

  Definiere dafür für alle $\kappa \in K$ und alle $y \in S_z^r$:

  $$\tilde{\sigma}(\kappa y) := \lambda_\kappa \circ \sigma(y) \circ \lambda_\kappa^{-1}.$$

  Dass $\tilde{\sigma}$ wohldefiniert ist, folgt aus der K_z-Äquivarianz von $\sigma|_{S_z^r}$: Seien $y_1, y_2 \in S_z^r$ und $\kappa_1, \kappa_2 \in K$, sodass $\kappa_1 y_1 = \kappa_2 y_2$. Dann ist $y_2 = \kappa_2^{-1}\kappa_1 y_1$ und $\kappa_2^{-1}\kappa_1 \in K_z$ und daher

  $$\begin{aligned} &\lambda_{\kappa_2} \circ \sigma(y_2) \circ \lambda_{\kappa_2}^{-1} = \lambda_{\kappa_2} \circ \sigma(\kappa_2^{-1}\kappa_1 y_1) \circ \lambda_{\kappa_2}^{-1} \\ &= \lambda_{\kappa_2} \circ (\lambda_{\kappa_2^{-1}\kappa_1} \circ \sigma(y_1) \circ \circ \lambda^{-1}_{\kappa_2^{-1}\kappa_1}) \lambda_{\kappa_2}^{-1} = \lambda_{\kappa_1}^{-1} \circ \sigma(y_1) \circ \lambda_{\kappa_1}^{-1}. \end{aligned}$$

- Zeige nun, dass $\|\tilde{\sigma}^* A\|_{W_4^{1,2}(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M,K) \|F_{D+A}\|_{L_4^2(B_{2r}^M(Kx_0))}$:

  Aufgrund der Äquivarianz von $\tilde{\sigma}^* A$ reicht es dafür gemäß Lemma 2.2.7, die L^2-Norm von $\tilde{\sigma}^* A$ abzuschätzen.

  Auch hier wird mit der Koflächenformel gearbeitet, diesmal wird dabei jedoch die Projektion von $T^r(Kx_0)$ auf die Scheibe S_z^r verwendet: Sei $\tilde{f} : Z \to S$ die Projektion auf die Scheibe S_z^r entlang der Orbits. Ähnlich wie in Abschätzung (4.3) erhält man:

  $$J_{\tilde{f}}(x) = J_{\tilde{f}\circ\phi}(x) J_{\phi^{-1}}(x) = J_{\phi^{-1}}(x) = \frac{1}{J_{\phi(x)}} \geqslant \frac{1}{Lip(\phi)^m} = c(M)$$

für alle $x \in Z$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
&c(M)\|\tilde{\sigma}^* A\|^2_{L^2(T^r(Kx_0))} = c(M)\int_{T^r(Kx_0)} |\tilde{\sigma}^* A|^2\,dx\\
&\leqslant \int_{T^r(Kx_0)} J_{\tilde{f}}(x)|\tilde{\sigma}^* A(x)|^2\,dx = \int_{S_z^r}\int_{Ky} |\tilde{\sigma}^* A(x)|^2\,dx\,dy\\
&= \int_{S_z^r} |\tilde{\sigma}^* A(y)|^2 H^{m-\ell}(Ky)\,dy \leqslant c(M)H^{m-\ell}(Kx_0)\int_{S_z^r} |\tilde{\sigma}^* A(y)|^2\,dy\\
&= c(M,K)H^{m-\ell}(Kx_0)\|\tilde{\sigma}^* A\|^2_{L^2(S_z^r)} = c(M,K)H^{m-\ell}(Kx_0)\|\sigma^* A\|^2_{L^2(S_z^r)}\\
&\leqslant \frac{c(M,K)H^{m-\ell}(Kx_0)}{r^{m-\ell}}\|F_{D+A}\|^2_{L^2(\bar{B})}
\end{aligned}$$

laut Lemma 4.3.1.

F_{D+A} ist K-äquivariant, also ist $|F_{D+A}|^2$ K-invariant. Daher ist

$$\begin{aligned}
\|F_{D+A}\|^2_{L^2(\bar{B})} &\leqslant \|F_{D+A}\|^2_{L^2(T^{2r}(Kx_0)|_{B_{2r}^{Kx_0}(x_0)})}\\
&\leqslant c(M,K)\frac{H^{m-\ell}(B_{2r}^{Kx_0}(x_0))}{H^{m-\ell}(Kx_0)}\|F_{D+A}\|^2_{L^2(T^{2r}(Kx_0))}\\
&= \frac{c(M,K)r^{m-\ell}}{H^{m-\ell}(Kx_0)}\|F_{D+A}\|^2_{L^2(T^{2r}(Kx_0))}.
\end{aligned}$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben:

$$\|\tilde{\sigma}^* A\|^2_{L^2(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M,K)\|F_{D+A}\|^2_{L^2(T^{2r}(Kx_0))}.$$

Definiere einen K-äquivarianten Koordinatenrahmen auf $T^r(Kx_0)$, mit dessen Hilfe $J^D(\tilde{\sigma}^* A)$ komponentenweise formuliert und $\|J^D(\tilde{\sigma}^* A)\|_{L^2(T^r(Kx_0))}$ (und damit $\|\tilde{\sigma}^* A\|_{W_4^{1,2}(T^r(Kx_0))}$) abgeschätzt werden kann:

Betrachte dafür die durch die lokale Parametrisierung ϕ definierten lokalen Koordinatenfelder

$$\partial_i(x) := (d\phi)(\phi^{-1}(x)) \cdot e_i$$

für $x \in S_z^r$.

∂_i ist K_z-äquivariant auf S_z^r, da ϕ (nach der Definition der K_z-Operation auf $\mathbb{R}^m$ aus Abschnitt 2.2.3) K_z-äquivariant ist: Für $x \in S_z^r$ und $h \in K_z$ ist

$$\begin{aligned}
\partial_i(hx) &= (d\phi)(\phi^{-1}(hx)) \cdot e_i = (d\phi)(\bar{h}\phi^{-1}(x)) \cdot e_i = h_*(d\phi)(\phi^{-1}(x)) \cdot e_i\\
&= h_*\partial_i(hx).
\end{aligned}$$

Demnach kann man ∂_i K-äquivariant fortsetzen zu Vektorfeldern (und somit zu einem Koordinatenrahmen) auf $T^r(Kx_0) = KS_z^r$: Für $x \in S_z^r$ und $k \in K$ definiere

$$V_i(kx) := k_*\partial_i(x).$$

(Diese Abbildungen sind wohldefiniert, denn für jedes $x \in S^r_z$ gilt:
Gibt es $k_1, k_2 \in K$, sodass $k_1 x = k_2 x$, so ist $k_1^{-1} k_2 \in K_x \subset K_z$ und daher auch

$$\begin{aligned}(k_2)_* v_i(x) &= (k_1(k_1^{-1}k_2))_* v_i(x) = (k_1)_*(k_1^{-1}k_2)_* v_i(x) = (k_1)_* v_i((k_1^{-1}k_2)x) \\ &= (k_1)_* v_i(x).\end{aligned}$$

Da ϕ die orbittreue Parametrisierung aus Korollar 2.2.5 ist, gilt für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $y \in T^r(Kx_0)$:
$V_i(y) \in T_y S^r_{y'} \subset T_y M$ (wenn $y \in S^r_{y'}$ ist);
für $i \in \{\ell+1, \ldots, m\}$ ist $V_i(y) \in T_y(Ky) \subset T_y M$.

Analog zu obiger Abschätzung für $\|\tilde{\sigma}^* A\|^2_{L^2_4(T^r(Kx_0))}$ erhält man für $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ (also für die Ableitungen in Scheibenrichtung):

$$\|D_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)\|^2_{L^2(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M, K) \|F_{D+A}\|^2_{L^2(T^{2r}(Kx_0))}.$$

Um die ganze $W^{1,2}$-Norm von $\sigma^* A$ abschätzen zu können, müssen auch die Ableitungen in Orbitrichtung (also in Richtung des Vektorfelds V_i für $i \in \{\ell+1, \ldots, m\}$) kontrolliert werden. Hierbei hilft ein Argument aus [Gas13] (Seite 6f) weiter:

Sei dafür $y \in S^r_z$. Dann gibt es einen differenzierbaren Weg $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Kx$ mit $\gamma_i(0) = y$ und $\gamma_i'(0) = V_i(y)$. Dann gibt es aber auch einen Weg $\kappa_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to K$, sodass $\gamma_i(t) = \kappa_i(t) y$. Insbesondere ist dann $\kappa_i(0) = e$ (das Einselement in K).

Da $\tilde{\sigma}^* A$ eine K-äquivariante Zusammenhangsform ist, gilt für alle $x \in T^r(Kx_0)$, $u \in T_x M$, $i \in \{\ell+1, \ldots, m\}$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$(\tilde{\sigma}^* A)_u(x) = \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \circ (\tilde{\sigma}^* A)_{\kappa_i(t)_* u}(\kappa_i(t) x) \circ \lambda_{\kappa_i(t)},$$

das heißt:

$$(\tilde{\sigma}^* A)_u(x) Y(x) = \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} [(\tilde{\sigma}^* A)_{\kappa_i(t)_* u}(\kappa_i(t) x), \lambda_{\kappa_i(t)} Y(x)].$$

Ableiten nach t an der Stelle $t = 0$ auf beiden Seiten (bezüglich des lokalen Referenzzusammenhangs $\tilde{D}$, eingeführt in Abschnitt 4.2) führt zu:

$$\begin{aligned}0 &= \left.\frac{\tilde{D}}{dt}\right|_{t=0} \left(\lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} [(\tilde{\sigma}^* A)_{\kappa_i(t)_* u}(\kappa_i(t) x), \lambda_{\kappa_i(t)} Y(x)]\right) \\ &= \psi^{-1}\left(x, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\psi_2\left(\lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} [(\tilde{\sigma}^* A)_{\kappa_i(t)_* u}(\kappa_i(t) x), \lambda_{\kappa_i(t)} Y(x)]\right)\right)\right) \\ &= \psi^{-1}\left(x, \psi_2\left(\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)}\right)([(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x)])\right.\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\tilde{\sigma}^* A)_u(\kappa_i(t)x), Y(x) \right] + \left[(\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u}(x), Y(x) \right] \\
&+ \left[(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right) Y(x) \right] \Bigg) \Bigg) \\
= {}& \psi^{-1} \left(x, \psi_2 \left(\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \right) ([(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x)]) \right) \right) \\
&+ \psi^{-1} \left(x, \psi_2 \left(\left[\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\tilde{\sigma}^* A)_u(\kappa_i(t)x), Y(x) \right] \right) \right) \\
&+ \psi^{-1} \left(x, \psi_2 \left(\left[(\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u}(x), Y(x) \right] \right) \right) \\
&+ \psi^{-1} \left(x, \psi_2 \left(\left[(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right) Y(x) \right] \right) \right) \\
= {}& \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \right) ([(\tilde{\sigma}^* A_u(x), Y(x)]) + \psi^{-1} (x, \psi_2([d_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x)])) \\
&+ \left[(\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u}(x), Y(x) \right] + \left[(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right) Y(x) \right] \\
= {}& \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \right) ([(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x)]) + \left[\tilde{D}_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x) \right] \\
&+ \left[(\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u}(x), Y(x) \right] + \left[(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right) Y(x) \right] \quad (4.4)
\end{aligned}
$$

(Dabei wurden die Linearität von ψ_2 und die Verträglichkeit von ψ mit der Lie-Klammer ausgenutzt; dass diese aus der Konstruktion von ψ folgen, wird in Abschnitt 2.1.2 gezeigt. Ansonsten wurde lediglich die Produktregel für die äußere Ableitung d verwendet.)

Also ist

$$
\begin{aligned}
\left[\tilde{D}_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x) \right] = {}& - \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \right) ([(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), Y(x)]) \\
&- \left[(\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u}(x), Y(x) \right] - \left[(\tilde{\sigma}^* A)_u(x), \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right) Y(x) \right] \quad (4.5)
\end{aligned}
$$

für alle $Y \in \Gamma(adP)$ und daher

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)_u(x) = {}& - \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \right) \circ (\tilde{\sigma}^* A)_u(x) - (\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u}(x) \\
&- (\tilde{\sigma}^* A)_u(x) \circ \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right). \quad (4.6)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{D}_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)_u\|_{L_4^2(S_z^r)} &\leqslant \left\| \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda^{-1}_{\kappa_i(t)} \right) \circ (\tilde{\sigma}^* A)_u \right\|_{L_4^2(S_z^r)} + \left\| (\tilde{\sigma}^* A)_{(\frac{d}{dt}|_{t=0}\kappa_i(t))_* u} \right\|_{L_4^2(S_z^r)} \\
&\quad + \left\| (\tilde{\sigma}^* A)_u \circ \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)} \right) \right\|_{L_4^2(S_z^r)} \\
&\leqslant c(M,K)\|\tilde{\sigma}^* A\|_{L_4^2(S_z^r)}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

(Denn: für jedes $i \in \{\ell+1,\dots,m\}$ ist $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \lambda_{\kappa_i(t)}$ beschränkt.)
Analog zur Rechnung für $\|\tilde{\sigma}^* A\|_{L_4^2(T^r(Kx_0))}$ folgt:

$$
\|\tilde{D}_{V_i}(\tilde{\sigma}^* A)_u\|_{L_4^2(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M,K)\|\tilde{\sigma}^* A\|_{L_4^2(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M,K)\|F_{D+A}\|_{L_4^2(T^{2r}(Kx_0))}.
$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$
\|\tilde{\sigma}^* A\|_{W_4^{1,2,(\tilde{D})}(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M,K)\|F_{D+A}\|_{L_4^2(T^{2r}(Kx_0))}
$$

und wegen der Äquivalenz der Sobolev-Normen bezüglich unterschiedlicher Referenzzusammenhänge (siehe Abschnitt 2.1.6) auch

$$
\|\tilde{\sigma}^* A\|_{W_4^{1,2}(T^r(Kx_0))} \leqslant c(M,K)\|F_{D+A}\|_{L_4^2(T^{2r}(Kx_0))}.
$$

- Zeige, dass $\tilde{\sigma} \in W^{2,2}\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$ (daraus folgt aufgrund der Äquivarianz von $\tilde{\sigma}$ direkt $\tilde{\sigma} \in W_4^{2,2}\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$):

  Da $\sigma \in W^{2,2}\Gamma((P \times_c G)|_{S_z^r})$ ist für alle $i,j \in \{1,\dots,\ell\}$ (also für $V_i, V_j \in TS_z^r$) $\tilde{D}_{V_i}(\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma}) \in L_4^2\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$.

  Für $j \in \{1,\dots,\ell\}$ folgt daraus insbesondere, dass $\tilde{D}_{V_j} \in W_2^{1,2}\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$. Daher kann man die Rechnungen (4.4) bis (4.7) anpassen auf $D_{V_j}\tilde{\sigma}$ und erhält für alle $i \in \{\ell+1,\dots,m\}$, dass $\tilde{D}_{V_i}(\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma}) \in L^2\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$.

  Für $j \in \{\ell+1,\dots,m\}$ ist $\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma}|_{S_z^r} \in W^{1,2}\Gamma((P \times_c G)|_{S_z^r})$ (das folgt unmittelbar aus einer Anpassung der Rechnungen (4.4) bis (4.7) auf $\tilde{\sigma}$).

  Für $i \in \{1,\dots,\ell\}$ folgt daraus direkt, dass $\tilde{D}_{V_i}(\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma}) \in L^2\Gamma(S_z^r)$ und daher wegen der Äquivarianz von V_i, V_j und $\tilde{\sigma}$ auch $\tilde{D}_{V_i}(\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma}) \in L^2\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$.

  Für $i \in \{\ell+1,\dots,m\}$ kann man Rechnungen (4.4) bis (4.7) wieder auf $D_{V_j}\tilde{\sigma}$ anwenden und erhält ebenfalls $\tilde{D}_{V_i}(\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma}) \in L^2\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$.

  Aus der Anpassung von (4.4) bis (4.7) erhält man weiterhin, dass

$$
(\tilde{D}_{V_j}\tilde{\sigma})|_{S_z^r} \in W^{1,2}\Gamma((P \times_c G)|_{S_z^r})
$$

für $j \in \{\ell + 1, \dots, m\}$.

Insgesamt folgt: $\tilde{\sigma} \in W^{2,2}\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$. Wegen der Äquivarianz von $\tilde{\sigma}$ folgt daraus schon, dass $\tilde{\sigma} \in W^{2,2}_4\Gamma((P \times_c G)|_{T^r(Kx_0)})$.

$\square$

5 Ein Existenzresultat für äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge

5.1 Ein lokales Existenzresultat für äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge

Mit Hilfe des im letzten Abschnitt bewiesenen K-äquivarianten Eichsatzes (Satz 4.0.2) kann, analog zu [Sed82], fast überall auf M auf kleinen Schläuchen die direkte Methode der Variationsrechnung angewandt werden. Auf diese Weise kann das folgende lokale Existenzresultat für K-äquivariante Yang-Mills-Zusammenhänge erzielt werden:

Lemma 5.1.1 (Äquivariante schwache Yang-Mills-Zusammenhänge auf Schläuchen). *Unter den Generalvoraussetzungen sei*

$$M^4 := M \setminus \bigcup_{\dim(Ky)<m-4} Ky.$$

Dann gibt es höchstens abzählbar viele $x_j \in M$ $(j \in \mathbb{N})$ mit $\dim(Kx_j) = m-4$, sodass gilt:

- $M' := M^4 \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Kx_j \right)$ *kann mit abzählbar vielen Schläuchen $U_\alpha := T^{r_\alpha}(Kx_\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ überdeckt werden.*

- *Auf jedem U_α gibt es eine schwache Lösung $A_\alpha \in W_4^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha})$ der Yang-Mills-Gleichung.*

- *Auf jeder Schnittmenge $U_\alpha \cap U_\beta$ gibt es einen Schnitt $g_{\alpha\beta} \in W_4^{1,4}\Gamma(P \times_c G)$, sodass $A_\alpha = (g^\delta_{\alpha\beta})^* A_\beta$.*

Ist die Kohomogenität der K-Operation auf M kleiner als 4, so ist $M^4 = M$; in diesem Fall erhält man eine Überdeckung von ganz M mit den Schläuchen U_α.

Dieses Lemma wird mittels eines Grenzprozesses ($\delta \searrow 0$) aus dem folgenden Zwischenresultat hervorgehen:

Lemma 5.1.2 (Äquivariante schwache Yang-Mills-Zusammenhänge auf Schläuchen, vor dem Grenzprozess)**.** *Sei (unter den Generalvoraussetzungen) $\delta > 0$. Definiere wie in Lemma 2.2.7*

$$M^4_{4\delta} := M \setminus \bigcup_{\dim(Ky)<m-4} T^{4\delta}(Ky).$$

Dann gibt es $N(\delta) \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_{N(\delta)} \in M$ mit $\dim(Kx_j) = m - 4$ für alle $j \in \{1, \ldots, N(\delta)\}$, sodass gilt:

- *$M^4_{4\delta} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\mu} Kx_j\right)$ kann mit abzählbar vielen Schläuchen $U^\delta_\alpha := T^{r^\delta_\alpha}(Kx^\delta_\alpha)$ (mit $\alpha \in \mathbb{N}$) von Radien $r^\delta_\alpha < \delta$ überdeckt werden.*
- *Auf jedem dieser U^δ_α gibt es eine schwache Lösung $A^\delta_\alpha \in W^{1,2}_4\Omega^1(adP|_{U_\alpha})$ der Yang-Mills-Gleichung.*
- *Auf jeder Schnittmenge $U^\delta_\alpha \cap U^\delta_\beta$ gibt es einen Schnitt $g^\delta_{\alpha\beta} \in W^{1,4}_4\Gamma(P \times_c G)$, sodass $A^\delta_\alpha = (g^\delta_{\alpha\beta})^* A^\delta_\beta$.*

Ist die Kohomogenität der K-Operation auf M kleiner als 4, so ist $M^4_{4\delta} = M$ und $N(\delta) = 0$ für alle $\delta > 0$; in diesem Fall erhält man eine Überdeckung von ganz M mit den Schläuchen U_α.

Der Beweis von Lemma 5.1.1 lässt sich in die folgenden Teilschritte gliedern, die den nachfolgenden Unterabschnitten entsprechen:

- **Konstruktion der Überdeckung $(U^\delta_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ (Abschnitt 5.1.1):** Für eine beliebige Folge von glatten Zusammenhangsformen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für die $\|F_{D+A}\|_{L^2(M)}$ hinreichend klein ist, wird M bis auf eine Ausnahmemenge mit Schläuchen überdeckt, sodass auf jedem dieser Schläuche die Voraussetzungen des K-äquivarianten Eichsatzes (Satz 4.0.2) erfüllt sind.
- **Lokales Umeichen einer Minimalfolge auf U^δ_α liefert dort Konvergenz (Abschnitt 5.1.2):** Auf jedem U^δ_α können die Glieder einer K-äquivarianten glatten YM-Minimalfolge mit Hilfe von Satz 4.0.2 äquivariant umgeeicht werden; die umgeeichte Folge ist konvergent in $W^{1,2}_4\Omega^1(adP|_{U^\delta_\alpha})$.

  Aus den erhaltenen Eichtransformationen erhalten wir Schnitte $g^\delta_{\alpha\beta} \in W^{1,4}((P \times_c G)|_{U^\alpha \cap U^\beta})$, die Grenzzusammenhänge ineinander überführen.
- **Für den Grenzwert A_α auf U^δ_α dieser Folge gilt: $D + A$ erfüllt die YM-Gleichung (Abschnitt 5.1.3):** Dies folgt mit Hilfe des Prinzips der symmetrischen Kritikalität. (Nach diesem Abschnitt ist Lemma 5.1.2 fertig bewiesen.)
- **Grenzübergang $\delta \searrow 0$ (Abschnitt 5.1.4):** Durch diesen Grenzübergang folgt Lemma 5.1.1 aus Lemma 5.1.2.

5.1.1 Konstruktion der Überdeckung $(U_\alpha^\delta)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ von $M_{4\delta}^4$

Hier soll gezeigt werden:

Lemma 5.1.3 (Lokale Eichbarkeit fast überall auf $M_{4\delta}^4$ von Zusammenhängen mit beschränkter Krümmung)**.** *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge glatter K-äquivarianter Zusammenhangsformen in $\Omega^1(adP)$, sodass $\|F_{D+A_i}\|_{L^2(M)} \leqslant R$ für alle hinreichend großen $i \in \mathbb{N}$ und für ein hinreichend kleines $R \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Dann gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $N(M,K,\delta) \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_{N(M,K,\delta)} \in M$ mit $\dim(Kx_j) = m-4$ für alle $j \in \{1, \dots, N(M,K,\delta)\}$, sodass gilt:

$M_{4\delta}^4 \setminus \bigcup_{j=1}^{N(M,K,\delta)} Kx_j$ kann überdeckt werden mit abzählbar vielen Schläuchen

$$U_\alpha^\delta := T^{r_\alpha^\delta}(Kx_\alpha^\delta)$$

($\alpha \in \mathbb{N}$, $0 < r_\alpha^\delta < \rho^*(x_\alpha^\delta)$, $x_\alpha^\delta \in M_{4\delta}^4 \setminus \bigcup_{j=1}^{N(M,K,\delta)} Kx_j$), sodass $T_{2r_\alpha^\delta}(Kx_\alpha^\delta)$ ebenfalls ein (nicht entarteter) Schlauch ist und

$$\|F_{D+A_i}\|_{L_4^2(T_{2r_\alpha^\delta}(Kx_\alpha^\delta))} \leqslant \varepsilon^{eich}$$

(mit ε^{eich} wie im äquivarianten Eichsatz (Satz 4.0.2)).

Um die Überdeckung $(U_\alpha^\delta)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ zu konstruieren, betrachte zunächst eine passende Folge von Überdeckungen von M mit Schlauchumgebungen:

Konstruktion einer Folge von Überdeckungen von $M_{4\delta}^4$

Lemma 5.1.4 (Eine Überdeckung von $M_{4\delta}^4$ mit Schläuchen)**.** *Sei $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $r^n \to 0$ bei $n \to \infty$. Sei $\delta \geqslant 0$.*

Dann gibt es eine Folge $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Überdeckungen von $M_{4\delta}^4$ mit Schlauchumgebungen um K-Orbits, sodass gilt:

- *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\theta(n) \in \mathbb{N}$, Punkte $x_i^n \in M_{4\delta}^4$ und Radien $r_i^n \leqslant \min\{\rho^*(x_i^n), r^n, \delta\}$ (für $i \in \{1, \dots, \theta(n)\}$), sodass $C^n = \{T^{r_i^n}(Kx_i^n)\}_{i=1}^{\theta(n)}$.*
- *Sei $(C^n)' := \{T^{2r_i^n}(Kx_i^n)\}_{i=1}^{\theta(n)}$. Dann es gibt eine Konstante $h(M,K,\delta) > 0$ (unabhängig von n), sodass jeweils $h+1$ Schläuche aus $(C^n)'$ leeren Schnitt haben.*

Beweis. Den Beweis gliedern wir folgendermaßen:

- Konstruiere zunächst eine Überdeckung C^1, welche die gewünschten Eigenschaften erfüllt und finde eine obere Schranke für die Anzahl der Überschneidungen darin:

  Sei $\mathcal{N}$ die Anzahl unterschiedlicher Isotropietypen in $M^4_{4\delta}$ (da (M, K) kompakt ist, ist $\mathcal{N} < \infty$). Nummeriere die Isotropietypen von $(M^4_{4\delta}, K)$ so durch, dass $(H_i) \geqslant (H_j) \Rightarrow i \leqslant j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, \mathcal{N}\}$.

  Definiere $\rho_{1,1} := \frac{1}{4}\min\{r^1, \rho_0, \delta\}$ (zur Erinnerung: ρ_0 ist der Injektivitätsradius von M).
  Es gibt ein $c_{1,1} \in \mathbb{N}$ und $y_{1,1,i}, \ldots, y_{1,1,c_{1,1}} \in M^{4\delta}_4(H_1)$, sodass $\{T^{\rho_{1,1}}(Ky_{1,1,i})\}_{i=1}^{c_{1,1}}$ eine Überdeckung von $U_{\frac{\rho_{1,1}}{2}}(M^{4\delta}_4(H_1)) \cap M^4_{4\delta}$ ist.
  Definiere $r^1_i := \rho_{1,1}$ und $x^1_i := y_{1,1,i}$ für $i \in \{1, \ldots, c_{1,1}\}$.
  Da $M^{4\delta}_4(> H_1) = \emptyset$, ist $\rho^*(x^1_i) = \frac{1}{4}\rho_0$ und daher

  $$r^1_i \leqslant \min\{r^1, \rho^*(x^1_i), \delta\} \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, c_{1,1}\}.$$

  Definiere $\rho_{1,2} := \frac{1}{8}\min\{r^1, \rho_0\}$.

  Es gibt ein $c_{1,2} \in \mathbb{N}$ und $y_{1,2,1}, \ldots, y_{1,2,c_{1,2}} \in M^{4\delta}_4(H_2) \setminus U_{\frac{\rho_{1,1}}{2}}(M^{4\delta}_4(H_1))$, sodass $\{T^{\rho_{2,1}}(Ky_{1,2,i})\}_{i=1}^{c_{1,2}}$ eine Überdeckung von $U_{\frac{\rho_{1,2}}{2}}(M^{4\delta}_4(H_2)) \setminus \bigcup_{i=1}^{c_{1,1}} T^{r^1_i}(Kx^1_i)$ ist.

  Definiere $r^1_i := \rho_{1,2}$ und $x^1_i := y_{1,2,i-c_{1,1}}$ für $i \in \{c_{1,1}+1, \ldots, c_{1,1}+c_{2,2}\}$.
  Da $M^{4\delta}_4(> H_2) = M^{4\delta}_4(H_1)$, ist $\operatorname{dist}(x^1_i, M^{4\delta}_4(> H_2)) \geqslant \frac{\rho_{1,1}}{2} = 4\rho_{1,2}$ und daher

  $$r^1_i = \rho_{1,2} \leqslant \rho^*(x^1_i) \text{ für alle } i \in \{c_{1,1}+1, \ldots, c_{1,1}+c_{1,2}\}.$$

  Setze iterativ fort:

  Für $\mu \in \{3, \ldots, \mathcal{N}\}$ definiere $\rho_{1,\mu} := \frac{1}{4^{\mu-1}\cdot 2}\min\{r^1, \rho_0\}$. Es gibt ein $c_{1,\mu} \in \mathbb{N}$ und $y_{1,\mu,1} \ldots, y_{1,\mu,c_{1,\mu}} \in M^{4\delta}_4(H_\mu) \setminus \bigcup_{i=1}^{\sum_{j=1}^{\mu-1} c_{1,j}} T^{r^1_i}(Kx^1_i)$, sodass $\{T^{\rho_{1,\mu}}(Ky_{1,\mu,i})\}_{i=1}^{c_{1,\mu}}$ eine
  Überdeckung von $U_{\frac{\rho_{1,\mu}}{2}}(M^{4\delta}_4(H_\mu)) \setminus \bigcup_{i=1}^{\sum_{j=1}^{\mu-1} c_{1,j}} T^{r^1_i}(Kx^1_i)$ ist.

  Definiere für $i \in \left\{\left(\sum_{j=1}^{\mu-1} c_{1,j}\right) + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{\mu} c_{1,j}\right\}$:
  $r^1_i := \rho_{1,\mu}$ und $x^1_i := y_{1,\mu,i-\sum_{j=1}^{\mu-1} c_{1,j}}$.

  Dann ist nach Konstruktion $\operatorname{dist}(x^1_i, M^{4\delta}_4(> H_\mu)) \geqslant \frac{\rho_{1,\mu-1}}{2} = 4\rho_{1,\mu}$ und daher

  $$r^1_i = \rho_{1,\mu} \leqslant \rho^*(x^1_i) \text{ für alle } i \in \left\{\left(\sum_{j=1}^{\mu-1} c_{1,j}\right) + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{\mu} c_{1,j}\right\}.$$

  Definiere $\theta(1) := \sum_{\mu=1}^{\mathcal{N}} c_{1,\mu}$ und $C^1 := \{T^{r^1_i}(Kx^1_i)\}_{i=1}^{\theta(1)}$. Definiere außerdem:
  $(C^1)' := \{T^{2r^1_i}(Kx^1_i)\}_{i=1}^{\theta(1)}$.

C^1 und $(C^1)'$ sind endliche Überdeckungen von $M^4_{4\delta}$ (mit $\sharp C^1 = \sharp (C^1)' = \theta(1)$), also können sich trivialerweise höchstens $\theta(1)$ Schläuche aus C^1 (bzw. aus $(C^1)'$) schneiden.

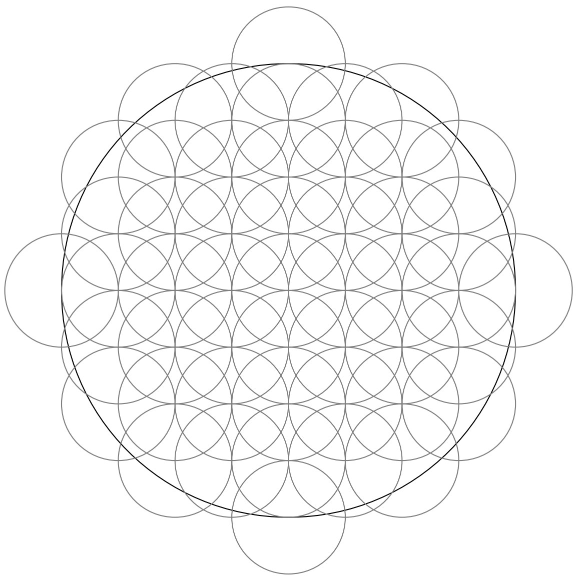
- Überdecke nun die Elemente von C^1 mit Schläuchen, deren Radien für C^n passen.

  Sei $T^{r^1_j}(Kx^1_j) \in C^1$. Sei $\ell(j) := m - \dim(Kx^1_j)$.

  Nach Konstruktion gilt für die aus dem Scheibensatz kommende orbittreue Parametrisierung ϕ^j von $T^{2r^1_j}(Kx^1_j) \in (C^1)'$: $c_\phi := \mathrm{BiLip}(\phi^j) = c(M,K,\delta)$ (unabhängig von j) und $\phi^j : B^{\ell(j)}_{2r^1_j}(0) \times \{0_{m-\ell(j)}\} \to S^{2r^1_j}_{x^1_j}$. Dann gilt für jedes $y \in S^{r^1_j}_{x^1_j}$:

$$\phi^j\left(B^{\ell(j)}_{\frac{\rho_{2,j}}{c_\phi}}((\phi^j)^{-1}(y)\right) \subset S^{\rho_{n,j}}_y \subset \phi(B^{\ell(j)}_{\rho_{n,j}c_\phi}((\phi^j)^{-1}(y)).$$

  Wir arbeiten nun zunächst auf $B^{\ell(j)}_{2r^1_j}(0) \subset \mathbb{R}^{\ell(j)}$. Überdecke $B^{\ell(j)}_{r^1_j}(0)$ mit Kugeln vom Radius $\rho_{n,j} := \frac{\min\{r^n, r^1_j\}}{\max\{2, c_\phi(M,K,\delta)\}}$ um Mittelpunkte, die im Abstand $\rho_{n,j}$ auf einem Koordinatenraster liegen.
  (Das heißt: Für die Mittelpunkte $\bar{x}^n_{j,i}$ gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell(j)} \in \mathbb{Z}$, sodass $\bar{x}^n_{j,i} = (\alpha_1\rho_{n,j}, \ldots, \alpha_{\ell(j)}\rho_{n,j})$.)
  Dabei sollen alle Elemente dieser Überdeckung ganz in $B^\ell_{2r^1_j}(0)$ enthalten sein.



  Sei $c_{n,j} \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Kugeln in dieser Überdeckung.

  Für die Kugeln $B^{\ell(j)}_{c_\phi\rho_{n,j}}(\bar{x}^n_{j,i})$ um dieselben Mittelpunkte gilt: Es gibt ein $\zeta(\ell(j), c_\phi)$ (unabhängig von j und n), sodass $\bigcap_{k=1}^{\zeta(\ell,c_\phi)} B^\ell_{c_\phi\rho_{n,j}}(\bar{x}^n_{j,i_k}) = \emptyset$ für alle

$\{i_k\}_{k=1}^{\zeta(\ell,c_\phi)} \subset \{1,\ldots,c_{n,j}\}$.

Nach Konstruktion ist $\phi^j(B^{\ell(j)}_{c_\phi \rho_{n,j}}(\bar{x}^n_{j,i}) \times \{0_{m-\ell}\}) \subset S^{2r^1_j}_{x^1_j}$ und

$$\bigcap_{k=1}^{\zeta(\ell,c_\phi)} S^{\rho_{n,j}}_{\phi^j(\bar{x}^n_{j,i})} \subset \phi^j\left(\bigcap_{k=1}^{\zeta(\ell,c_\phi)} B^{\ell}_{c_\phi \rho_{n,j}}(\bar{x}^n_{j,i_k})\right) = \phi^j(\emptyset) = \emptyset.$$

Also ist auch

$$\bigcap_{k=1}^{\zeta(\ell(j),c_\phi)} T^{\rho_{n,j}}(K(\phi^j(\bar{x}^n_{j,i}))) = K\left(\bigcap_{k=1}^{\zeta(\ell,c_\phi)} S^{\rho_{n,j}}_{\phi^j(\bar{x}^n_{j,i})}\right) = \emptyset.$$

Demnach ist

$$C^n := \bigcap_{j=1}^{\theta(1)} \left\{T^{\rho_{n,j}}(K\phi^j(\bar{x}^n_{j,i}))\right\}$$

eine geeignete Wahl für die n-te Überdeckung. Dies entspricht

$$C^n = \left\{T^{r^n_i}(Kx^n_i)\right\}_{i=1}^{\theta(n)}$$

wenn man definiert:
$r^n_i := \rho_{n,1}$ und $x^n_i := \phi^1\left(\bar{x}^n_{1,i}\right)$ für $i \in \{1,\ldots,c_{n,1}\}$,
$r^n_i := \rho_{n,z}$ und $x^n_i := \phi^z\left(\bar{x}^n_{z,i-\sum_{j=1}^{z-1} c_{n,j}}\right)$ für $i \in \left\{\left(\sum_{j=1}^{z-1} c_{n,j}\right)+1,\ldots,\sum_{j=1}^{z} c_{n,z}\right\}$
und $\theta(n) := \sum_{\alpha=1}^{j} c_{n,\alpha}$.

- Also gibt es ein $h(M,K,\delta)$ unabhängig von n, sodass jeweils h Elemente von C^n leeren Schnitt haben.

  Nämlich $h := \theta(0) \cdot \max\{\zeta(\ell,c_\phi) : \ell \in \{1,\ldots,m\}\}$.

$\square$

Wähle nun eine beliebige Nullfolge $(r^j)_{j\in\mathbb{N}}$ und bilde eine dazu passende Folge von Überdeckungen $(C^j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $M^4_{4\delta}$ nach Lemma 5.1.4.

Betrachte weiterhin eine K-äquivariante Yang-Mills-Minimalfolge in $W^{1,2}\Omega^1(adP)$ (bezüglich des Referenzzusammenhangs D). Sei also $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega^1(adP)$, sodass

$$\mathrm{YM}(D+A_i) \to \inf\{\mathrm{YM}(D+\alpha) \,:\, \alpha \in W^{1,2}\Omega^1(adP) \text{ ist } K\text{-äquivariant}\}.$$

Für ein festes $j \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$ würden wir gerne den Eichsatz für äquivariante Zusammenhangsformen (Satz 4.0.2) auf jedes Element der Überdeckung $(C^j_\beta)_{\beta\in\{1,\ldots,\theta'(j)\}}$ anwenden. Da nicht gewährleistet ist, dass

$$\|F_{D+A_i}\|^2_{L^2_4((C^j_\beta)')} \leqslant \varepsilon^{eich}$$

für alle $i \in \{1, \dots, \theta(j)\}$, ist das jedoch nicht möglich.

Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der Äquivarianz der Zusammenhangsformen A_i

$$|F_{D+k^*A_i}| = |\lambda_k^{-1} F_{D+A_i} \lambda_k| = |F_{D+A_i}|$$

ist für alle $k \in K$ und somit $|F_{D+A_i}|^2$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine K-invariante Funktion auf M darstellt.
Daher ist nach Lemma 2.2.7

$$\|F_{D+A_i}\|_{L^2_4((C^j_\beta)')} \leqslant c(M, K, \delta) \|F_{D+A_i}\|_{L^2((C^j_\beta)')}.$$

Weiterhin ist die Anzahl der $\beta \in \mathbb{N}$, auf denen $\|F_{D+A_i}\|^2_{L^2_4((C^j_\beta)')} > \varepsilon^{eich}$ gilt, nach oben beschränkt - und zwar gleichmäßig in i und j:
Für

$$\begin{aligned} N_{i,j} &:= \#\{(C^j_\beta)' \in (C^j)' : \|F_{D+A_i}\|_{L^2_4((C^j_\beta)')} \geqslant \varepsilon_{eich}\} \\ &= \# \left\{ (C^j_\beta)' \in (C^j)' : \int_{(C^j_\beta)'} |F_{D+A_i}|^2 \, dx \geqslant \left(\frac{\varepsilon_{eich}}{c(M, K, \delta)} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

gilt:

$$hR \geqslant h \int_M |F_{D+A_i}|^2 \, dx \geqslant \sum_{\beta=1}^{\theta(j)} \int_{(C^j_\beta)'} |F_{D+A_i}|^2 \, dx \geqslant N_{i,j} \left(\frac{\varepsilon_{eich}}{c(M, K, \delta)} \right)^2$$

(mit $h = h(M, K, \delta)$ aus Lemma 5.1.4 und R aus den Voraussetzungen von Lemma 5.1.3). Also ist $N_{i,j} \leqslant \left\lfloor \frac{hRc^2}{\varepsilon^2_{eich}} \right\rfloor =: \gamma(M, K, \delta)$.

Die Schläuche C^j_β mit $\|F_{D+A_i}\|^2_{L^2_4((C^j_\beta)')} > \varepsilon^{eich}$ nennen wir im Folgenden *schlecht für* A_i;
die Schläuche C^j_β mit $\|F_{D+A_i}\|^2_{L^2_4((C^j_\beta)')} \leqslant \varepsilon^{eich}$ nennen wir *gut für* A_i.
Jeder Schlauch C^j_β ist also für jede (einzelne) Zusammenhangsform A_i entweder schlecht oder gut.
Definiere die Menge der für A_i schlechten Schläuche in C^j als

$$\Sigma^{i,j} := \{C^j_\beta \in C^j : \|F_{D+A_i}\|^2_{L^2_4((C^j_\beta)')} > \varepsilon^{eich}\}.$$

Gilt für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$, dass $C^j_\beta \in \Sigma^{i,j}$, so nennen wir den Schlauch C^j_β *fast schlecht* für die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$;
ist für alle bis auf endlich viele $i \in \mathbb{N}$, dass $C^j_\beta \notin \Sigma^{i,j}$, so nennen wir den Schlauch C^j_β *fast gut* für die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Im Allgemeinen ist ein Schlauch für eine Folge von Zusammenhangsformen weder fast schlecht noch fast gut für eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Das Ziel im folgenden Teil dieses Abschnitts ist, eine Teilfolge $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ der Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 5.1.3 zu finden, sodass eine möglichst große Teilmenge von $M^4_{4\delta}$ mit fast guten Schläuchen für $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ überdeckt werden kann. Diese fast guten Schläuche werden aus Elementen der Überdeckungen C^j ausgewählt.

Existenz einer Teilfolge von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für die alle Elemente *eines* C^j entweder fast schlecht oder fast gut sind

Lemma 5.1.5. *Sei $j \in \mathbb{N}$ fixiert. Es gibt eine Teilfolge $(A_{i(j,\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass die Folge $(\Sigma^{i(j,\xi),j})_{\xi\in\mathbb{N}}$ konstant ist.*

Beweis. Die Folge $(\Sigma^{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ nimmt ihre Werte in der Potenzmenge von C^j an. Da C^j endlich ist, ist auch die Potenzmenge von C^j endlich. Demnach muss $(\Sigma^{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ einen ihrer Werte unendlich oft annehmen; dieser ist ein Häufungswert der Folge und somit der Grenzwert einer Teilfolge von $(\Sigma^{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$. □

Als nächsten Schritt beseitigen wir die Abhängigkeit der Teilfolge von j:

Existenz einer Teilfolge von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für die alle Elemente *jedes* C^j entweder fast schlecht oder fast gut sind

Lemma 5.1.6. *Es gibt eine Teilfolge $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sodass die Folge $(\Sigma^{i(\xi),j})_{\xi\in\mathbb{N}}$ für $\xi \geqslant j$ konstant ist.*

Beweis. Das folgt durch induktives Anwenden von Lemma 5.1.5:

Wende Lemma 5.1.5 auf die Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und die Überdeckung D^1 an. Definiere die erhaltene Teilfolge $(A_{i(1,\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}} =: (A_{i((1),\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$.
Wende Lemma 5.1.5 auf die Folge $(A_{i((1),\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ und die Überdeckung D^2 an. Definiere die erhaltene Teilfolge als $(A_{i((1,2),\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$.
Wende für $j \geqslant 3$ sukzessive Lemma 5.1.5 auf die Folge $(A_{i((1,2,\dots,j-1),\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ und die Überdeckung D^j an. Definiere die erhaltene Teilfolge als $(A_{i((1,2,\dots,j),\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$.
Definiere nun für jedes $\xi \in \mathbb{N}$: $A_{i(\xi)} := A_{(1,\dots,\xi),\xi}$.
$(\Sigma^{i(\xi),j})_{\xi\in\mathbb{N}}$ ist konstant für $\xi \geqslant j$, da $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ ab dem Folgenindex $\xi = j$ eine Teilfolge von $(A_{i((1,2,\dots,j),\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ ist. □

Konstruktion der Überdeckung $(U_\alpha^\delta)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ aus für $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ fast guten Schläuchen

Definiere nun $\Gamma^j := \{C_\beta^j \in D^j : C_\beta^j$ ist fast gut für $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}\}$.

Nach Konstruktion ist Γ^j eine Überdeckung von

$$M_{4\delta}^4 \setminus \{\text{höchstens } \gamma \text{ Schläuche vom Radius } \leqslant r^j\}.$$

Dabei ist $\gamma = \left\lfloor \frac{h(M,K,\delta)Rc(M,K,\delta)^2}{\varepsilon_{eich}^2} \right\rfloor$ unabhängig von j und nach Voraussetzung $r^j \to 0$ bei $j \to \infty$.

Also gibt es $x_1^\delta, \ldots, x_{N(\delta)}^\delta \in M_{4\delta}^4$ (mit $N(\delta) \leqslant \gamma(M,K,\delta)$), sodass $\Gamma := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Gamma^j$ eine Überdeckung von

$$M_{4\delta}^4 \setminus \left(\bigcup_{\beta=1}^{N(\delta)} K x_\beta^\delta \right)$$

ist.

Γ ist eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen und hat daher höchstens abzählbar viele Elemente. Nummeriere diese durch zu $\Gamma = \{U_\alpha^\delta\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$. Nach Konstruktion kann der äquivariante Eichsatz (Satz 4.0.2) auf jedes Element von $\{U_\alpha^\delta\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ angewandt werden.

Dimension der schlechten Orbits

Es bleibt zu zeigen, dass $\dim(Kx_j) = m - 4$ für alle $j \in \{1, \ldots, N(\delta)\}$:

Für jedes $x \in M$ mit $\dim(Kx) = m - \ell > m - 4$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle hinreichend kleinen Radien r ist wegen der Äquivarianz der A_i

$$\begin{aligned}
&\|F_{D+A_i}\|^2_{L_4^2(T^r(Kx))} \leqslant c \|F_{D+A_i}\|^2_{L_4^2(T^r(Kx),K)} = c \sup_{Q_\rho(y)\subset B_r(x)} \rho^{4-m} \int_{Q_\rho(y)} |F_{D+A_i}(t)|^2 \, dt \\
&\leqslant c \sup_{Q_\rho(y)\subset B_r(x)} \rho^{4-m} \int_{B_\rho^{Kx}(y)} \int_{S_z^\rho} |F_{D+A_i}(t)|^2 \, dt \, dz \\
&= c \sup_{Q_\rho(y)\subset B_r(x)} \rho^{4-m} |B_\rho^{Kx}(y)| \int_{S_z^\rho} |F_{D+A_i}(t)|^2 \, dt \\
&\leqslant c \sup_{\rho\leqslant r} \rho^{4-\ell} \|F_{D+A_i}\|^2_{L^2(M)} \overset{r\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}$$

Also kann für kein x_i mit $i \in \{1, \ldots, N(M,K,\delta)\}$ gelten, dass $\dim(Kx_i) > m - 4$.

5.1.2 Lokales Umeichen einer Minimalfolge auf U_α^δ liefert dort Konvergenz

Hier soll gezeigt werden:

Lemma 5.1.7 (Lokale Konvergenz einer Teilfolge nach Umeichung). *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine K-äquivariante* YM-*Minimalfolge (bezüglich des Referenzzusammenhangs D) in $\Omega^1(adP)$ und sei $(U_\alpha^\delta)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ die Überdeckung von $M_{4\delta}^4 \setminus \bigcup_{j=1}^{\mu} Kx_j$ aus Lemma 5.1.3. Dann gibt es*

- *für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ eine Folge von K-äquivarianten Eichtransformationen $(\sigma_\xi^\alpha)_{\xi\in\mathbb{N}}$ in $W_4^{1,2}\Gamma((P\times_c G)|_{U_\alpha^\delta})$,*
- *eine streng monoton steigende Abbildung $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (welche eine Teilfolge $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ definiert),*
- *für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ eine K-äquivariante Zusammenhangsform $A_\alpha^\delta \in W_4^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ und*
- *für jedes Paar $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$ mit $U_\alpha^\delta \cap U_\beta^\delta \neq \emptyset$ einen K-äquivarianten Schnitt $g_{\alpha\beta}^\delta \in W_4^{1,4}(P\times_c G|_{U_\alpha^\delta\cap U_\beta^\delta})$,*

sodass

- *$(\sigma_\xi^\alpha)^* A_{i(\xi)} \rightharpoonup A_\alpha^\delta$ schwach in $W^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$,*
- *$(\sigma_\xi^\alpha)^* A_{i(\xi)} \to A_\alpha^\delta$ in $L^2\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$,*
- *$F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^* A_{i(\xi)}} \rightharpoonup F_{D+A_\alpha^\delta}$ schwach in $L^2\Omega^2(adP|_{U_\alpha^\delta})$ und*
- *für $(g_{\alpha\beta}^\delta)_\xi := \sigma_\xi^\beta \circ (\sigma_\xi^\alpha)^{-1}$ gilt: $(g_{\alpha\beta}^\delta)_\xi \rightharpoonup g_{\alpha\beta}^\delta$ schwach in $W_4^{1,4}\Gamma((P\times_c G)|_{U_\alpha^\delta\cap U_\beta^\delta})$.*

Beweis.

- Für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $U_\alpha^\delta = T^{r_\alpha^\delta}(Kx_\alpha^\delta)$ sei $(U_\alpha^\delta)' := T^{2r_\alpha^\delta}(Kx_\alpha^\delta)$. Nach Konstruktion von $\{U_\alpha^\delta\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ und der Teilfolge $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 5.1.3 gibt es für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ ein $\bar{\xi}_0^\alpha \in \mathbb{N}$, sodass $\|F_{D+A_{i(\xi)}}\|_{L_4^2((U_\alpha^\delta)')} \leqslant \varepsilon_{eich}$ für alle $\xi \geqslant \bar{\xi}_0^\alpha$. Also ist der äquivariante Eichsatz (Satz 4.0.2) anwendbar:

  Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ und $\xi \geqslant \bar{\xi}_0^\alpha$ gibt es ein $\sigma_\xi^\alpha \in W_4^{2,2}\Gamma((P\times_c G)|_{U_\alpha^\delta}$, sodass

  $$\|(\sigma_\xi^\alpha)^* A_{i(\xi)}\|_{W_4^{1,2}(U_\alpha^\delta)} \leqslant C_{eich}\|F_{D+A_{i(\xi)}}\|_{L_4^2(U_\alpha^\delta)}.$$

  Da $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine K-äquivariante Minimalfolge für YM ist, ist $(\|F_{D+A_{i(\xi)}}\|_{L_4^2(U_\alpha^\delta)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Damit ist auch $((\sigma_\xi^\alpha)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ eine in $W_4^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ beschränkte Folge und somit insbesondere auch in $W^{1,2}(adP|_{U_\alpha^\delta})$ beschränkt.

Da $W^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ ein reflexiver Banachraum ist, gibt es (siehe zum Beispiel [Bre05], Seite 50, Théorème III.27) eine in $W^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ schwach konvergente Teilfolge $((\sigma^\alpha_{\xi(\eta,\alpha)})^* A_{i(\xi(\eta,\alpha))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ von $((\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$. A priori muss aber auf jedem Schlauch U_α^δ eine andere Teilfolge gebildet werden.

- Wir wollen zeigen, dass es eine gemeinsame Teilfolge $((\sigma^1_{\xi(\eta)})^* A_{i(\xi(\eta))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ von $((\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ für *alle* Schläuche U_α^δ mit $\alpha \in \mathbb{N}$ gibt. Dafür verwenden wir ein Diagonalisierungsargument analog zum Beweis von Lemma 5.1.6:

  Die Folge $((\sigma^1_\xi)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ hat auf U_1, wie bereits gezeigt, eine konvergente Teilfolge $((\sigma^1_{\xi(\eta,1)})^* A_{i(\xi(\eta,1))})_{\eta\in\mathbb{N}}$, die wir mit $((\sigma^1_{\xi(\eta,(1))})^* A_{i(\xi(\eta,(1)))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ bezeichnen.
  Da $(A_{i(\xi(\eta,1))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ ist, hat die Folge $((\sigma^2_{\xi(\eta,1)})^* A_{i(\xi(\eta,1))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ auf U_2 eine konvergente Teilfolge, die wir mit $((\sigma^2_{\xi(\eta,(1,2))})^* A_{i(\xi(\eta,(1,2)))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ bezeichnen.

  Definiere rekursiv für $\alpha \geqslant 3$ die analog erhaltene Teilfolge von $((\sigma^\alpha_{\xi(\eta,(1,2,\ldots,\alpha-1))})^* A_{i(\xi(\eta,(1,2,\ldots,\alpha-1)))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ als $((\sigma^\alpha_{\xi(\eta,(1,2,\ldots,\alpha))})^* A_{i(\xi(\eta,(1,2,\ldots,\alpha)))})_{\eta\in\mathbb{N}}$.
  Definiere nun $(\sigma^\alpha_{\xi(\eta))})^* A_{i(\xi(\eta))} := (\sigma^\alpha_{\xi(\eta,(1,2,\ldots,\eta))})^* A_{i(\xi(\eta,(1,2,\ldots,\eta)))}$.

  Definiere den schwachen Grenzwert von $((\sigma^\alpha_{\xi(\eta))})^* A_{i(\xi(\eta))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ auf U_α^δ bei $\eta \to \infty$ als A_α^δ. Zur Erleichterung der Notation bezeichne die Folge $((\sigma^\alpha_{\xi(\eta))})^* A_{i(\xi(\eta))})_{\eta\in\mathbb{N}}$ wieder mit $((\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$.

  Die Einbettung $i_0 : W^{1,2}(U_\alpha^\delta) \hookrightarrow L^2(U_\alpha^\delta)$ ist laut dem Satz von Rellich-Kondrachov ([Bre05], Seite 169) kompakt.
  Weiterhin ist die Einbettung $i_1 : W_4^{1,2}(U_\alpha^\delta) \hookrightarrow W^{1,2}(U_\alpha^\delta)$ stetig. Somit ist die Einbettung $i_0 \circ i_1 : W_4^{1,2}(U_\alpha^\delta) \hookrightarrow L^2(U_\alpha^\delta)$ kompakt.
  Schwach konvergente Folgen in $W_4^{1,2}(U_\alpha^\delta)$ sind bezüglich der $W_4^{1,2}$-Norm auf U_α^δ beschränkt (das folgt aus dem Satz von Banach-Steinhaus, [Bre05], Seite 16). Die Folge $((\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ liegt also in einer beschränkten Menge in $W_4^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ und damit in einer kompakten Menge in $L^2\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$. Sie hat also eine Teilfolge, die in $L^2\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ konvergiert. Wir bezeichnen diese Teilfolge wieder mit $((\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$.

- Als Nächstes soll gezeigt werden, dass die Folge $((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)_{\xi\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $W_4^{1,4}\Gamma((P\times_c G)|_{U_\alpha^\delta\cap U_\beta^\delta})$.

  Da G eine kompakte Lie-Gruppe ist, ist jedes $(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi$ beschränkt bezüglich der Norm auf $L^\infty\Gamma((P\times_c G)|_{U_\alpha^\delta\cap U_\beta^\delta})$ und damit auch in $L_4^4\Gamma((P\times_c G)|_{U_\alpha^\delta\cap U_\beta^\delta})$.

  Weiterhin gilt nach Definition der $(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi$:

  $$(\sigma^\beta_\xi)^* A_{i(\xi)} = ((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)^{-1} D(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi + ((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)^{-1}(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi.$$

Demnach ist

$$\begin{aligned}
&\|D(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi\|_{L^4_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)} \leqslant \|(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi\|_{L^\infty_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)}\|((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)^{-1}D(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi\|_{L^4_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)}\\
&\leqslant C(G)\|(\sigma^\beta_\xi)^*A_{i(\xi)} - ((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)^{-1}(\sigma^\alpha_\xi)^*A_{i(\xi)}(g^\delta_{\alpha\beta})_\xi\|_{L^4_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)}\\
&\leqslant C(G)(\|(\sigma^\beta_\xi)^*A_{i(\xi)}\|_{L^4_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)} + \|(\sigma^\alpha_\xi)^*A_{i(\xi)}\|_{L^4_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)})\\
&\leqslant C(G)(\|(\sigma^\beta_\xi)^*A_{i(\xi)}\|_{W^{1,2}_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)} + \|(\sigma^\alpha_\xi)^*A_{i(\xi)}\|_{W^{1,2}_4(U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta)})\\
&\leqslant C(G)\|F_{D+A_{i(\xi)}}\|_{W^{1,2}_4(U^\delta_\alpha)},
\end{aligned}$$

was gleichmäßig in ξ beschränkt ist.

Somit ist $((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)_{\xi\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $W^{1,4}_4\Gamma((P\times_c G)|_{U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta})$.

Da auch $W^{1,4}_4\Gamma((P\times_c G)|_{U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta})$ ein reflexiver Banachraum ist, hat $((g^\delta_{\alpha\beta})_\xi)_{\xi\in\mathbb{N}}$ demnach eine schwach in $W^{1,4}_4\Gamma((P\times_c G)|_{U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta})$ konvergente Teilfolge.

Wiederum hängt diese Teilfolge noch von α und β ab und wiederum beseitigen wir diese Abhängigkeit mittels eines Diagonalisierungsarguments analog zum Beweis von Lemma 5.1.6.

Demzufolge gibt es eine streng monoton steigende Abbildung $\xi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, sodass für alle $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$ die Teilfolge $((g^\delta_{\alpha\beta})_{\xi(\theta)})_{\theta\in\mathbb{N}}$ schwach in $W^{1,4}_4\Gamma((P\times_c G)|_{U^\delta_\alpha\cap U^\delta_\beta})$ konvergiert. Definiere deren Grenzwert als $g^\delta_{\alpha\beta}$. Bilde die entsprechende Teilfolge von $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ und bezeichne $i(\xi(\theta))$ wieder als $i(\xi)$.

- Es bleibt zu zeigen, dass für diese Folge gilt, dass $F_{D+(\sigma^\alpha_i)^*A_{i(\xi)}} \rightharpoonup F_{D+A^\delta_\alpha}$ schwach in L^2 bei $\xi\to\infty$. Definiere als Abkürzung $(A^\delta_\alpha)_\xi := (\sigma^\alpha_i)^*A_{i(\xi)}$. Dann ist für alle $\varphi\in\Omega^2_0(adP)$

$$\begin{aligned}
&(F_{D+(A^\delta_\alpha)_\xi} - F_{D+A^\delta_\alpha},\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)}\\
&= (D((A^\delta_\alpha)_\xi - A^\delta_\alpha),\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} + ([(A^\delta_\alpha)_\xi,(A^\delta_\alpha)_\xi] - [A^\delta_\alpha,A^\delta_\alpha],\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)}.
\end{aligned}$$

Da $(A^\delta_\alpha)_\xi \rightharpoonup A^\delta_\alpha$ schwach in $W^{1,2}\Omega^1(adP|_{U^\delta_\alpha})$, geht $(D((A^\delta_\alpha)_\xi - A^\delta_\alpha),\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)}$ gegen 0 bei $\xi\to\infty$. Es bleibt zu zeigen, dass $([(A^\delta_\alpha)_\xi,(A^\delta_\alpha)_\xi] - [A^\delta_\alpha,A^\delta_\alpha],\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)}$ ebenfalls gegen 0 strebt. Dafür formen wir zunächst um: Wegen

$$\begin{aligned}
&[(A^\delta_\alpha)_\xi,(A^\delta_\alpha)_\xi] - [A^\delta_\alpha,A^\delta_\alpha]\\
&= [(A^\delta_\alpha)_\xi - A^\delta_\alpha,(A^\delta_\alpha)_\xi + A^\delta_\alpha] + [A^\delta_\alpha,(A^\delta_\alpha)_\xi] - [(A^\delta_\alpha)_\xi,A^\delta_\alpha]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&([A^\delta_\alpha,(A^\delta_\alpha)_\xi] - [(A^\delta_\alpha)_\xi,A^\delta_\alpha])_{uv}\\
&= [(A^\delta_\alpha)_u,((A^\delta_\alpha)_\xi)_v] - [(A^\delta_\alpha)_v,((A^\delta_\alpha)_\xi)_u] - [((A^\delta_\alpha)_\xi)_u,(A^\delta_\alpha)_v] + [((A^\delta_\alpha)_\xi)_v,(A^\delta_\alpha)_u]\\
&= [(A^\delta_\alpha)_u,((A^\delta_\alpha)_\xi)_v] - [(A^\delta_\alpha)_v,((A^\delta_\alpha)_\xi)_u] + [(A^\delta_\alpha)_v,((A^\delta_\alpha)_\xi)_u] - [(A^\delta_\alpha)_u,((A^\delta_\alpha)_\xi)_v]\\
&= 0
\end{aligned}$$

(für alle $u, v \in \Gamma(TM)$) ist

$$[(A_\alpha^\delta)_\xi, (A_\alpha^\delta)_\xi] - [A_\alpha^\delta, A_\alpha^\delta] = [(A_\alpha^\delta)_\xi - A_\alpha^\delta, (A_\alpha^\delta)_\xi + A_\alpha^\delta]$$

und somit

$$\begin{aligned}
&([(A_\alpha^\delta)_\xi, (A_\alpha^\delta)_\xi] - [A_\alpha^\delta, A_\alpha^\delta], \varphi)_{L^2(U_\alpha^\delta)} = ([(A_\alpha^\delta)_\xi - A_\alpha^\delta, (A_\alpha^\delta)_\xi + A_\alpha^\delta], \varphi)_{L^2(U_\alpha^\delta)} \\
&\leqslant \|[(A_\alpha^\delta)_\xi - A_\alpha^\delta, (A_\alpha^\delta)_\xi + A_\alpha^\delta]\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \|\varphi\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \\
&\leqslant c \|(A_\alpha^\delta)_\xi - A_\alpha^\delta\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \|(A_\alpha^\delta)_\xi + A_\alpha^\delta\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \|\phi\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \\
&\overset{\xi \to \infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

da $(A_\alpha^\delta)_\xi \to A_\alpha^\delta$ in $W^{1,2}\Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ (und daher $\|(A_\alpha^\delta)_\xi - A_\alpha^\delta\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \to 0$ bei $\xi \to \infty$ und $\|(A_\alpha^\delta)_\xi + A_\alpha^\delta\|_{L^2(U_\alpha^\delta)}$ gleichmäßig in ξ beschränkt ist).

□

5.1.3 $D + A_\alpha^\delta$ erfüllt auf U_α^δ die YM-Gleichung

Lemma 5.1.8 (Yang-Mills-Gleichung)**.** *Für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ ist A_α^δ auf U_α^δ eine schwache Lösung der Yang-Mills-Gleichung. Das heißt:*

$$((D + A_\alpha^\delta)\varphi, F_{D+A_\alpha^\delta})_{L^2\Omega^2(U_\alpha^\delta)} = 0$$

für alle $\varphi \in \Omega_0^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$.

(Dabei ist $\Omega_0^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ definiert als die Menge aller $\varphi \in \Omega^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ mit kompaktem Träger in U_α^δ.)

Beweis. Wir nehmen an, A_α^δ wäre keine schwache Lösung der Yang-Mills-Gleichung, und zeigen, dass das einen Widerspruch zur Voraussetzung ergibt, dass $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge für YM ist:

Angenommen, es gäbe ein $\alpha \in \mathbb{N}$ und ein $\varphi \in \Omega_0^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$, sodass

$$((D + A_\alpha^\delta)\varphi, F_{D+A_\alpha^\delta})_{L^2\Omega^2(U_\alpha^\delta)} < 0.$$

Wegen des Prinzips der symmetrischen Kritikalität (Satz 2.2.8) kann man ohne Einschränkung annehmen, dass φ K-äquivariant ist (also $\varphi_u(x) = \lambda_k^{-1} \circ \varphi_{k_* u}(kx) \circ \lambda_k$ für alle $x \in U_\alpha^\delta$, $u \in T_xM$ und $k \in K$).

Sei $(A_{i(\xi)})_{\xi\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 5.1.7. Definiere für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ und für alle $\xi \in \mathbb{N}$:

$$(\tilde{A}_\alpha^\delta)_\xi(t) := \begin{cases} (\sigma_\alpha^\delta)_\xi^* A_{i(\xi)} & \text{auf } M \setminus U_\alpha^\delta, \\ (\sigma_\alpha^\delta)_\xi^* A_{i(\xi)} + t\varphi & \text{auf } U_\alpha^\delta. \end{cases}$$

Dann ist $(\tilde{A}^\delta_\alpha)_\xi(t)$ eine K-äquivariante Zusammenhangsform in $W^{1,2}\Omega^1(adP)$. Offensichtlich ist $F_{D+(\tilde{A}^\delta_\alpha)_\xi(t)} = F_{D+(\sigma^\delta_\alpha)^*_\xi A_{i(\xi)}}$ auf $M \setminus U^\delta_\alpha$. Auf U^δ_α ist

$$\begin{aligned}
&|F_{D+(\tilde{A}^\delta_\alpha)_\xi(t)}|^2 = |F_{D+(\sigma^\delta_\alpha)^*_\xi A_{i(\xi)}}|^2 \\
&= \left|F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}} + t(D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})(\varphi) + t^2[\varphi,\varphi]\right|^2 \\
&= |F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}|^2 + t^2|(D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})(\varphi)|^2 + t^4|[\varphi,\varphi]|^2 \\
&\quad + 2t\langle F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi\rangle_{adP} + t^2\langle F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, [\varphi,\varphi]\rangle_{adP} \\
&\quad + t^3\langle (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi, [\varphi,\varphi]\rangle_{adP}.
\end{aligned}$$

Damit kann man $\mathrm{YM}(D+(\tilde{A}^\delta_\alpha)_\xi(t))$ berechnen:

$$\begin{aligned}
&\|F_{D+\tilde{A}^\alpha_{i(\xi)}}\|^2_{L^2(M)} = \int_{M\setminus U_\alpha} |F_{D+\tilde{A}^\alpha_{i(\xi)}}|^2\,dx + \int_{U_\alpha} |F_{D+\tilde{A}^\alpha_{i(\xi)}}|^2\,dx \\
&= \int_{M\setminus U_\alpha} |F_{D+(\sigma^\delta_\alpha)^*_\xi A_{i(\xi)}}|^2\,dx + \int_{U_\alpha} |F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}|^2\,dx + t^2\int_{U_\alpha} |(D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi|^2\,dx \\
&\quad + t^4\int_{U_\alpha} |[\varphi,\varphi]|^2\,dx + 2t\int_{U_\alpha}\langle F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi\rangle_{adP}\,dx \\
&\quad + t^2\int_{U_\alpha}\langle F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, [\varphi,\varphi]\rangle_{adP}\,dx + t^3\int_{U_\alpha}\langle (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi, [\varphi,\varphi]\rangle_{adP}\,dx \\
&= \int_M |F_{D+(\sigma^\delta_\alpha)^*_\xi A_{i(\xi)}}|^2\,dx + 2t\int_{U_\alpha}\langle F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi\rangle_{adP}\,dx + O(t^2) \\
&= \|F_{D+A_{i(\xi)}}\|^2_{L^2(M)} + 2t(F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi)_{L^2(U_\alpha)} + O(t^2) \\
&\overset{\xi\to\infty}{\to} \inf\{\|F_{D+A}\|^2_{L^2(M)} : A \in W^{1,2}\Omega^1(adP) \quad K\text{-äquivariant}\} \\
&\quad + 2t(F_{D+A^\alpha}, (D+A^\delta_\alpha)\varphi)_{L^2(U_\alpha)} + O(t^2).
\end{aligned}$$

Denn:

- $(D+A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ war nach Voraussetzung eine äquivariante YM-Minimalfolge;
- Begründung für

$$(F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} \overset{\xi\to\infty}{\to} (F_{D+A^\delta_\alpha}, (D+A^\delta_\alpha)\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} :$$

  Aus $F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}} \rightharpoonup F_{D+A^\delta_\alpha}$ schwach in $L^2(U^\delta_\alpha)$ und $(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)} \to A^\delta_\alpha$ in $L^2(U^\delta_\alpha)$ (laut Lemma 5.1.7) folgt:

$$\begin{aligned}
&|(F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} - (F_{D+A^\delta_\alpha}, (D+A^\delta_\alpha)\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)}| \\
&= |(F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)})\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} - (F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+A^\delta_\alpha)\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} \\
&\quad + (F_{D+(\sigma^\alpha_\xi)^* A_{i(\xi)}}, (D+A^\delta_\alpha)\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)} - (F_{D+A^\delta_\alpha}, (D+A^\delta_\alpha)\varphi)_{L^2(U^\delta_\alpha)}|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |(F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}}, (D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)})\varphi - (D+A_\alpha^\delta)\varphi)_{L^2(U_\alpha^\delta)} \\
&\quad + (F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}} - F_{D+A_\alpha^\delta}, (D+A_\alpha^\delta)\varphi)_{L^2(U_\alpha^\delta)}| \\
&\leqslant |(F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}}, [(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)} - A_\alpha^\delta, \varphi])_{L^2(U_\alpha^\delta)}| \\
&\quad + |(F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}} - F_{D+A_\alpha^\delta}, (D+A_\alpha^\delta)\varphi)_{L^2(U_\alpha^\delta)}| \\
&\leqslant \sup_{\xi\in\mathbb{N}} \|F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}}\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \|[(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)} - A_\alpha^\delta, \varphi]\|_{L^2(U_\alpha^\delta)} \\
&\quad + |(F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}} - F_{D+A_\alpha^\delta}, (D+A_\alpha^\delta)\varphi)_{L^2(U_\alpha^\delta)}| \\
&\overset{\xi\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}
$$

da $F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}}$ (als schwach in $L^2(U_\alpha^\delta)$ konvergente Folge) beschränkt in $L^2(U_\alpha^\delta)$ ist,
$(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)} \to A_\alpha^\delta$ in $L^2(U_\alpha^\delta)$ laut Lemma 5.1.7,
$(D+A_\alpha^\delta)\varphi \in L^2(U_\alpha^\delta) = (L^2(U_\alpha^\delta))^*$ und
$F_{D+(\sigma_\xi^\alpha)^*A_{i(\xi)}} \rightharpoonup F_{D+A_\alpha^\delta}$ schwach in $L^2(U_\alpha^\delta)$.

Demnach wäre für $t > 0$ hinreichend klein und ξ hinreichend groß

$$\|F_{D+(\tilde{A}_\alpha^\delta)_{i(\xi)}}\|_{L^2(M)}^2 < \inf\{\|F_{D+A}\|_{L^2(M)}^2 : A \in W^{1,2}\Omega^1(adP) \quad K\text{-äquivariant}\},$$

was einen Widerspruch darstellt.

Gäbe es ein $\alpha \in \mathbb{N}$ und ein $\varphi \in \Omega_0^1(adP \times \wedge^1 TM|_{U_\alpha^\delta})$, sodass

$$((D+A_\alpha^\delta)\varphi, F_{D+A_\alpha^\delta})_{L^2(U_\alpha^\delta)} > 0,$$

so wäre analog für $t < 0$ mit hinreichend kleinem Betrag

$$\|F_{D+(\tilde{A}_\alpha^\delta)_{i(\xi)}}\|_{L^2(M)}^2 < \inf\{\|F_{D+A}\|_{L^2(M)}^2 : A \in W^{1,2}\Omega^1(adP) \quad K\text{-äquivariant}\}.$$

Demnach muss für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ und für alle $\varphi \in \Omega_0^1(adP|_{U_\alpha^\delta})$ gelten:

$$((D+A_\alpha^\delta)\varphi, F_{D+A_\alpha^\delta})_{L^2(U_\alpha^\delta)} = 0$$

□

A_α^δ ist sogar minimierender Yang-Mills-Zusammenhang unter den K-äquivarianten Zusammenhängen auf U_α^δ mit denselben Randwerten. Dies folgt unmittelbar aus der schwachen Unterhalbstetigkeit des Yang-Mills-Funktionals (im Sinne von Lemma 2.1.31).

5.1.4 Grenzübergang $\delta \searrow 0$

Definiere nun $\delta_n := \frac{1}{n}$. Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$M^4_{4\delta_{n_0}} \neq \emptyset.$$

Offensichtlich ist $M = \bigcup_{j=n_0}^{\infty} M^4_{4\delta_j}$.

Definiere

$$U := \bigcup_{j=n_0}^{\infty} \{U^{\delta_j}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}.$$

Dann ist U eine Vereinigung abzählbarer Mengen und somit selbst abzählbar. Nummeriere also die Elemente von U (in einer beliebigen Reihenfolge) durch zu

$$U = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}.$$

U ist eine Überdeckung von

$$M' := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(M^4_{\frac{4}{n}} \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\frac{1}{n})} K x_i^{\frac{1}{n}} \right) \subset M \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N(\frac{1}{n})} K x_i^{\frac{1}{n}} \right).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\{x_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, x^{\frac{1}{n}}_{N(\frac{1}{n})}\}$ eine endliche Menge. Demnach ist $M \setminus M'$ eine höchstens abzählbare Vereinigung von Orbits. Nach Konstruktion ist auf jedem U_α der äquivariante Eichsatz (Satz 4.0.2) anwendbar; Lemmata 5.1.7 und 5.1.8 zeigen, dass es auf jedem U_α einen (minimierenden) YM-Zusammenhang $A_\alpha \in W^{1,2}_4\Omega^1(adP|_{U_\alpha})$ gibt.

Es bleibt zu zeigen, dass es $W^{1,4}_4$-Umeichungen $g_{\alpha\beta}$ zwischen A_α und A_β für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ gibt. Der Beweis hierfür geht aber völlig analog zu dem für die Existenz der Umeichungen $g^\delta_{\alpha\beta}$ zwischen A^δ_α und A^δ_β.

5.2 Existenz eines K-äquivarianten Yang-Mills-Zusammenhangs fast überall

Im letzten Abschnitt wurden aus einer YM-Minimalfolge auf M lokal auf Schläuchen in M' Yang-Mills-Zusammenhänge konstruiert. Die Menge $\{D + A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ definiert jedoch noch keinen Yang-Mills-Zusammenhang auf M', da a priori nicht klar ist, ob es glatte (oder zumindest stetige) Eichtransformationen zwischen den A_α gibt (vergleiche hierzu Abschnitt 2.1.4).

Um die Glattheit dieser Eichtransformationen zu zeigen, wird hier ein Argument von Meyer und Rivière ([MR03], Lemma 4.10, Seite 214) verwendet, welches die

Glattheit stationärer Yang-Mills-Zusammenhänge in Coulomb-Eichung belegt. Dieses Argument ist in [MR03] nur auf euklidischen Kugeln durchgeführt:

Lemma 5.2.1 (Glattheit umgeeichter YM-Zusammenhänge auf Kugeln in $\mathbb{R}^m$)**.** *Es gibt eine Konstante $\kappa(m)$, sodass gilt:*

Sei $A \in W_4^{1,2}(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ eine schwache Yang-Mills-Zusammenhangsform, sodass es eine Folge glatter Einsformen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ gibt mit $A_i \to A$ in $(W^{1,2} \cap L^4)(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ und $\|F_{D+\bar{A}_i}\|_{L_4^2(B^m)} \leqslant \kappa(m)$ für alle $i \in \mathbb{N}$;
dann ist die Coulomb-Eichung $a := s^*A$ aus Korollar 4.1.2 glatt auf $B^m_{\frac{1}{2}}$.

(In [MR03] wird dieses Lemma formuliert für stationäre Yang-Mills-Zusammenhänge. Die Stationarität wird dort jedoch nur verwendet, um $A \in W_4^{1,2}(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1\mathbb{R}^m)$ aus $A \in W^{1,2}(B^m, \mathfrak{g}\otimes\wedge^1\mathbb{R}^m)$ zu erhalten, was in dieser Formulierung bereits vorausgesetzt wird (da wir es in der Anwendung aus der Äquivarianz von A erhalten).)

Um analytische Komplikationen beim Übergang zu gekrümmten Mannigfaltigkeiten zu vermeiden, beschränken wir uns hier auf den Fall, dass M flach ist. Modifikationen der hier aus [MR03] zitierten Argumente würden vermutlich erlauben, den allgemeinen Fall zu behandeln.

Für flache Mannigfaltigkeiten M zeigen wir hier also:

Satz 5.2.2 (K-äquivarianter Yang-Mills-Zusammenhang auf M')**.** *Zusätzlich zu den Generalvoraussetzungen aus Abschnitt 3.1 sei M eine flache Mannigfaltigkeit und $M' = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} U_\alpha$ definiert wie in Lemma 5.1.1. Definiere $U'_\alpha := T^{\frac{r_\alpha}{2}}(Kx_\alpha)$ (nach Konstruktion ist dann $M' = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} U'_\alpha$).*

Es gibt ein Prinzipalfaserbündel $(P', \pi', M'; G)$ über M' (auf welchem eine K-Operation im Sinne von Abschnitt 2.2.2 definiert ist), eine glatte, K-äquivariante Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(ad(P'))$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ eine lokale Eichtransformationen σ_α, sodass $A^\alpha = \sigma_\alpha^* A$ auf U'_α .

Insbesondere gibt es demnach eine glatte K-äquivariante Yang-Mills-Zusammenhangsform (bezüglich D) $A \in \Omega^1(adP')$ in einem (potentiell von adP verschiedenen) Bündel über einer K-invarianten Teilmenge M' von M mit $\dim(M \setminus M') \leqslant 4$.

Dabei muss (in Analogie zu [Sed82]) davon ausgegangen werden, dass das Bündel P' nicht mit $P|_{M'}$ übereinstimmt: Die Übergangsabbildungen von P' gehen hervor aus den (glatten) Eichtransformationen, welche die lokalen Zusammenhangsformen A_α ineinander überführen; diese sind jedoch nur auf $U'_\alpha \cap U'_\beta$ definiert und definieren daher nur über M' ein Bündel. Daher kann sich das neue Bündel P' topologisch von P unterscheiden. (A priori ist nicht klar, ob P' überhaupt zu einem Bündel über M fortgesetzt werden kann.) Es ist jedoch immerhin zu vermuten, dass P' gewisse topologische Invarianten mit P gemeinsam hat, ebenfalls in Analogie zu [Sed82], Theorem 5.5 (Seite 523). Diese Frage genauer zu untersuchen, würde hier jedoch zu weit führen.

Daher ist es wichtig für den Beweis dieses Satzes (und schon allein, um seine Formulierung zu rechtfertigen), sicherzustellen, dass auf diesem neuen Bündel P' überhaupt eine K-Operation definiert ist. Diese K-Operation muss durch die K-Operation auf P induziert werden: über jedem der Schläuche U'_α stimmen P und P' überein, wodurch eine K-Operation auf $P'|_{U'_\alpha}$ definiert ist (nämlich als diejenige auf $P|_{U'_\alpha}$).

Um zu gewährleisten, dass sich daraus eine wohldefinierte K-Operation auf dem Totalraum P' ergibt, muss sichergestellt werden, dass die Übergangsabbildungen von P' K-äquivariant sind, in dem Sinne, dass die Eichtransformationen, aus denen sie hervorgehen, K-äquivariant sind.

Die bisherigen "Übergangsabbildungen" $g_{\alpha\beta}$ zwischen den A_α sind nicht glatt, sondern liegen nur in $W^{1,4}\Gamma((P \times_c G)|_{U_\alpha \cap U_\beta})$ (siehe Lemma 5.1.1). Wie bereits erwähnt, benötigen wir Lemma 5.2.1, übertragen auf flache Mannigfaltigkeiten, um zunächst glatte Zusammenhangsformen zu erhalten:

Lemma 5.2.3 (Glattheit umgeeichter YM-Zusammenhänge auf Kugeln in flachen Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei M eine flache Mannigfaltigkeit und $B := B_r^M(x_0) \subset M$ eine geodätische Kugel in M. Es gibt eine Konstante $\kappa(P) > 0$, sodass gilt:*

Sei $A \in W_4^{1,2}\Omega^1(adP|_B)$ ein schwacher Yang-Mills-Zusammenhang, sodass es eine Folge glatter Formen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \Omega^1(adP|_B)$ gibt mit $A_i \to A$ in $(W^{1,2} \cap L^4)\Omega^1(adP|_B)$ und $\|F_{D+\tilde{A}_i}\|_{L_4^2(B)} \leqslant \kappa(adP)$ für alle $i \in \mathbb{N}$;
dann ist die Eichung $a := s^*A$ aus Lemma 4.2.1 glatt auf $B' = B^M_{\frac{r}{2}}(x_0)$.

(Die Anpassung auf flache Mannigfaltigkeiten ist direkt und erfolgt hier nur deshalb so ausführlich, weil die ersten Schritte sich ohne Weiteres auf allgemeine Mannigfaltigkeiten übertragen lassen. Dann lässt sich Gleichung (5.1) (die schwache Formulierung der Yang-Mills-Gleichung nach Parametrisierung) jedoch nicht ohne Weiteres vereinfachen; mit dieser komplizierteren Gleichung sollte ein zum Beweis von Lemma 5.2.1 in [MR03] ähnliches Argument möglich sein.)

Beweis. Sei $\phi : B \to M$ eine lokale Parametrisierung von M. Sei $(g_{ij})_{i,j}$ die Jacobi-Matrix von ϕ (bezüglich der durch ϕ definierten lokalen Koordinaten auf M) und $(g^{ij})_{ij}$ die zu (g_{ij}) inverse Matrix. Sei $\psi : adP|_B \to B \times \mathfrak{g}$ eine lokale Trivialisierung von adP auf B.

Wie in Abschnitt 2.1.3 und im Beweis von Lemma 4.2.1 definiere die kovariante Ableitung

$$\tilde{D}_u Y(x) := \psi^{-1}\left(x, d_u(\psi_2 \circ Y)(x)\right)$$

und verwende diese als Referenzzusammenhang.
Definiere $\tilde{A}$ und $\tilde{A}_i$ durch $D + A = \tilde{D} + \tilde{A}$ und $D + A_i = \tilde{D} + \tilde{A}_i$.

Definiere dann

$$\bar{A} := \phi^*(\psi_2 \circ \tilde{A}) \in W_4^{1,2}(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^m)$$

und

$$\bar{A}_i := \phi^*(\psi_2 \circ \tilde{A}_i) \in C^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^m).$$

Dann konvergiert $\bar{A}_i$ in $L^2(B^m)$ gegen $\bar{A}$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\|\bar{A}_i - \bar{A}\|^2_{L^2(B^m)} &= r^m \int_{B^m} |\phi^*(\psi_2 \circ (\tilde{A}_i - \tilde{A}))|^2 \, dx \leqslant c(\phi) r^m \int_B |\psi_2 \circ (\tilde{A}_i - \tilde{A})|^2 \, dx \\ &\leqslant c(\phi, \psi) r^m \int_B |A_i - A|^2 \, dx = c(adP) \|\tilde{A}_i - \tilde{A}\|^2_{L^2(B)} = c(adP) \|A_i - A\|^2_{L^2(B)} \overset{i \to \infty}{\to} 0\end{aligned}$$

nach Voraussetzung.

A ist schwacher Yang-Mills-Zusammenhang auf B, das heißt:

$$((D + A)\varphi, F_{D+A})_{L^2(B)} = 0$$

für alle $\varphi \in \Omega_0^1(adP|_B)$. Das ist (wegen $D + A = \tilde{D} + \tilde{A}$) gleichbedeutend zu

$$((\tilde{D} + \tilde{A})\varphi, F_{\tilde{D}+\tilde{A}})_{L^2(B)} = 0.$$

für alle $\varphi \in \Omega_0^1(adP|_B)$.

Weiterhin besagt Rechnung (4.3) im Beweis zu Lemma 4.2.1, dass

$$\|F_{d+\bar{A}_i}\|_{L_4^2(B^m)} \leqslant c(adP) \|F_{D+A_i}\|_{L_4^2(B)}.$$

Definiere

$$\kappa(adP) := \frac{\kappa(m)}{c(adP)}.$$

mit $\kappa(m)$ aus Lemma 5.2.1. Dann erhält man daraus direkt

$$\|F_{D+A_i}\|_{L_4^2(B)} \leqslant \kappa(adP) \text{ für alle } i \in \mathbb{N}$$

und daher

$$\|F_{d+\bar{A}_i}\|_{L_4^2(B^m)} \leqslant \kappa(m) \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $\bar{\varphi} \in C_0^\infty(B^m, \mathfrak{g} \otimes \mathbb{R}^m)$ gibt es ein $\varphi \in \Omega_0^1(adP|_B)$, sodass $\bar{\varphi} = \phi^*(\psi_2 \circ \varphi)$.

Man erhält also:

$$
\begin{aligned}
0 &= ((\tilde{D}+\tilde{A})\varphi, F_{\tilde{D}+\tilde{A}})_{L^2(B)} \\
&= \int_B \langle (\tilde{D}\varphi(x) + [\tilde{A}(x), \varphi(x)]), (\tilde{D}\tilde{A}(x) + [\tilde{A}(x), \tilde{A}(x)]) \rangle_{adP\otimes\wedge^2 TM}\, dx \\
&= \int_{B^m(0)} |\det(g)| \sum_{i,j,k,l} g^{ik} g^{jl} \\
&\qquad \langle \psi^{-1}(\phi^{-1}(x), (\phi^{-1})^*(d\bar{\varphi} + [\bar{A}, \bar{\varphi}])_{ij}), \psi^{-1}(\phi^{-1}(x), (\phi^{-1})^*(d\bar{A} + [\bar{A}, \bar{A}])_{kl}) \rangle_{\mathfrak{g}\otimes\wedge^2\mathbb{R}^m}\, dx \\
&= \int_{B^m(0)} |\det(g)| \sum_{i,j,k,l} g^{ik} g^{jl} \langle (d\bar{\varphi} + [\bar{A}, \bar{\varphi}])_{ij}, (d\bar{A} + [\bar{A}, \bar{A}])_{kl} \rangle_{\mathfrak{g}\otimes\wedge^2\mathbb{R}^m}\, dx \\
&= \int_{B^m(0)} |\det(g)| \sum_{i,j,k,l} g^{ik} g^{jl} \langle ((d+\bar{A})\bar{\varphi})_{ij}, (F_{d+\bar{A}})_{kl} \rangle_{\mathfrak{g}\otimes\wedge^2\mathbb{R}^m}\, dx. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

Ist M eine flache Mannigfaltigkeit, so gibt es eine isometrische Parametrisierung $\tilde{\phi} : B_r^m(0) \to B_r^M(x_0)$. Dann können wir $\phi : B^m(0) \to M$ definieren durch

$$\phi(x) := \tilde{\phi}(rx).$$

Dann ist in obiger Rechnung $g^{ij} = \delta_{ij}$ und daher

$$((d+\bar{A})\bar{\varphi}, F_{d+\bar{A}})_{L^2(B^m(0))} = 0.$$

Somit ist $\bar{A}$ eine schwache Lösung der Yang-Mills-Gleichung auf $B^m(0)$. Demnach können wir Lemma 5.2.1 anwenden: Die Coulomb-Eichung $\bar{s}^*\bar{A}$ ist glatt auf $B^m(0)$.

Wie in Abschnitt 2.1.4 gesehen, vertauschen Eichtransformationen mit Trivialisierungen. Demnach gilt für
$s \in W_4^{2,2}\Gamma(P \times_c G)$, definiert durch $s(x) := (\psi^{P\times_c G})^{-1}(x, \bar{s}(\phi^{-1}(x)))$, dass

$$s^*A(x) = (\psi^{adP})^{-1}(x, \bar{s}^*\bar{A}(\phi^{-1}(x)))$$

ebenfalls glatt auf B ist. □

Da wir uns für den Beweis von Satz 5.2.2 Gedanken über Äquivarianz der verwendeten Eichtransformation machen müssen, ist es wichtig, zu beobachten, dass s auf $S^r_{x_\alpha}$ sogar K_{x_α}-äquivariant ist:
Da K_{x_α} (als Teilmenge von K) durch Isometrien auf M operiert und x_α festhält, ist $K_{x_\alpha} B_r(x_0) = B_r(x_\alpha)$; die so definierte K_{x_α}-Operation auf $B_r(x_\alpha)$ induziert eine ebenfalls isometrische K_{x_α}-Operation auf $B_r^m(0)$ durch

$$k\bar{x} := \phi_\alpha^{-1}(k\phi(\bar{x})) \quad \text{für alle } k \in K_{x_\alpha} \text{ und } \bar{x} \in B^m_{r_\alpha}(0).$$

Da diese Operation isometrisch ist und die 0 festhält, definiert sie eine Darstellung $K_{x_\alpha} \hookrightarrow O(m)$. Laut Lemma 4.1.1 ist die Eichtransformation, welche eine K_{x_α}-äquivariante Zusammenhangsform A in Coulomb-Eichung bringt, demnach selbst K_{x_α}-äquivariant.

(Bei der Behandlung allgemeiner Mannigfaltigkeiten verwendet man die orbittreue Parametrisierung, die, eingeschränkt auf $S^r_{x_\alpha}$, ebenfalls isometrisch ist.)

Beweise nun mit Hilfe von Lemma 5.2.3 zunächst eine Variante von Satz 5.2.2, in der noch keine K-Äquivarianz vorkommt:

Lemma 5.2.4 (Existenz glatter Übergangsabbildungen für eine Kugelüberdeckung von M')**.** *Sei M eine flache Mannigfaltigkeit und $M' = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} U_\alpha$ definiert wie in Lemma 5.1.1. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ überdecke $U'_\alpha := T^{\frac{r_\alpha}{2}}(Kx_\alpha)$ (mit den Notationen aus Lemma 5.1.1) mit endlich vielen ($n(\alpha) \in \mathbb{N}$) geodätischen Kugeln $B_r(x_1^\alpha), \dots B_r(x_{n(\alpha)}^\alpha)$, die ganz in U_α enthalten sind.*

Es gibt ein Prinzipalfaserbündel $(P'', \pi'', M'; G)$ über M', eine glatte, K-äquivariante Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(ad(P''))$ und auf jedem B_i^α eine lokale Eichtransformationen σ_i^α, sodass $A^\alpha = (\sigma_i^\alpha)^* A$ auf B_i^α für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n(\alpha)\}$.

Insbesondere gibt es demnach eine glatte (aber nicht K-äquivariante) Yang-Mills-Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(adP'')$ in einem (potentiell von adP verschiedenen) Bündel über einer K-invarianten Teilmenge M' von M mit $\dim(M \setminus M') \leqslant 4$.

Beweis. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ überdecke $U'_\alpha = T^{\frac{r_\alpha}{2}}(Kx_\alpha)$ mit endlich vielen ($n(\alpha) \in \mathbb{N}$) geodätischen Kugeln $B_1^\alpha, \dots B_{n(\alpha)}^\alpha$, die ganz in U_α enthalten sind.

Auf jedem der B_i^α kann man Lemma 5.2.3 anwenden und erhält eine Eichtransformation $s_i^\alpha \in W_4^{2,2}\Gamma(P \times_c G|_{B_i^\alpha})$, sodass $(s_i^\alpha)^* A_\alpha \in \Omega^1(adP|_{B_i^\alpha})$ ist. Bezeichne $\tilde{A}_i^\alpha := (s_i^\alpha)^* A_\alpha \in \Omega^1(adP|_{B_i^\alpha})$.

Nun gilt es, glatte Eichtransformationen $u \in \Gamma(P \times_c G)$ zu finden, die die A_i^α auf unterschiedlichen Kugeln ineinander überführen.

Zeige dafür zunächst die Existenz der passenden $u \in W_4^{1,2}\Gamma(P \times_c G)$ und danach deren Glattheit.

Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ und alle $i, j \in \{1, \dots, n(\alpha)\}$ ist

$$A_i^\alpha = (s_i^\alpha s_j^\alpha)^* A_j^\alpha$$

und $s_i^\alpha s_j^\alpha \in W_4^{1,2}\Gamma(adP)$.

Für $\alpha \neq \beta \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, n(\alpha)\}$ und $j \in \{1, \dots, n(\beta)\}$ ist

$$A_i^\alpha = s_i^\alpha g_{\alpha\beta} (s_j^\beta)^{-1} A_j^\beta \tag{5.2}$$

(mit $g_{\alpha\beta} \in W_4^{1,4}((P \times_c G)|_{U_\alpha \cap U_\beta})$ aus Lemma 5.1.1) und es gilt:

$$s_i^\alpha g_{\alpha\beta} (s_j^\beta)^{-1} \in W_4^{1,2}\Gamma((P \times_c G)|_{U_\alpha \cap U_\beta}).$$

Wir haben also $W_4^{1,2}$-Eichtransformationen zwischen lokalen glatten Yang-Mills-Zusammenhängen; nun soll deren Glattheit gezeigt werden.

Seien also $A \in \Omega^1(adP|_U)$, $\tilde{A} \in \Omega^1(adP|_V)$ und $u \in W_4^{1,2}\Gamma((P \times_c G)_{U\cap V})$, sodass

$$A = u^*\tilde{A} = u^{-1}Du + u^{-1}\tilde{A}u.$$

Diese Gleichung kann man nach Du auflösen und erhält:

$$Du = \tilde{A}u - uA.$$

Da A und $\tilde{A}$ glatte Einsformen sind und $u \in W_4^{1,4}\Gamma((P \times_c G)|_{U\cap V})$, folgt daraus, dass Du ebenso regulär ist wie u. Durch iterative Anwendung dieses Arguments folgt aus $u \in W_4^{1,2}\Gamma((P\times_c)|_{U\cap V}$, dass $u \in W_4^{\infty,2}\Gamma((P \times_c G)|_{U\cap V})$ und somit $u \in \Gamma((P \times_c G)|_{U\cap V})$.

Wie in Abschnitt 2.1.4 gesehen, definiert $\{A_i^\alpha\}$ somit einen Zusammenhang auf dem durch $\{s_i^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n(\alpha)\}\}$ definierten Bündel über $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} U'_\alpha = M'$ (nach Konstruktion der Überdeckung $\{U_\alpha\}$ ist $\{U'_\alpha\}$ eine Überdeckung von M'). □

Beweis von Satz 5.2.2. Sei $\alpha \neq \beta$, sodass $U'_\alpha \cap U'_\beta \neq \emptyset$ und sodass (ohne Einschränkung) $K_{x'_\beta}$ konjugiert zu einer Untergruppe von K_{x_α} ist. Definiere $x'_\beta \in Kx_\beta$ als den eindeutig bestimmten Schnittpunkt von Kx_β mit $S_{x_\alpha}^{2r_\alpha}$. Dann ist die Isotropiegruppe $K_{x'_\beta}$ konjugiert zu K_{x_β} und somit ebenfalls zu einer Untergruppe von K_{x_α}. Weiterhin ist

$$K\left(S_{x_\alpha}^{\frac{r_\alpha}{2}} \cap S_{x'_\beta}^{\frac{r_\beta}{2}}\right) = U'_\alpha \cap U'_\beta.$$

Sei $r'_\alpha := \frac{3}{4}r_\alpha$ und $r'_\beta := \frac{3}{4}r_\beta$. Wähle in Lemma 5.2.4 die Überdeckungen von U'_α und U'_β so, dass $B_\alpha := B_{r'_\alpha}(x_\alpha) \in \{B_1^\alpha, \dots B_{n(\alpha)}^\alpha\}$ und $B_\beta := B_{r'_\beta}(x'_\beta) \in \{B_1^\beta, \dots B_{n(\beta)}^\beta\}$. Dann gibt es laut Lemma 5.2.4 eine glatte lokale Eichtransformation $s_{\alpha\beta}$ auf $B_\alpha \cap B_\beta$, sodass $A_\alpha = s_{\alpha\beta}^* A_\beta$ auf $B_\alpha \cap B_\beta$.

Da $S := S_{x_\alpha}^{\frac{r_\alpha}{2}} \cap S_{x'_\beta}^{\frac{r_\beta}{2}} \subset B_\alpha \cap B_\beta$, ist $\bar{s} := s_{\alpha\beta}|_S$ wohldefiniert und glatt. Da $K_{x'_\beta}$ konjugiert ist zu einer Untergruppe von K_{x_α}, ist $s_{\alpha\beta}$ $K_{x'_\beta}$-äquivariant (da alle in Gleichung (5.2) vorkommenden Eichtransformationen $K_{x'_\beta}$-äquivariant sind).

Man kann $\bar{s}$ also K-äquivariant zu einer Eichtransformation auf $KS = U'_\alpha \cap U'_\beta$ fortsetzen durch

$$\tilde{s}_{\alpha\beta}(kx) := \lambda_k \circ \bar{s}(x) \circ \lambda_k^{-1} \quad \text{für alle } k \in K \text{ und } x \in S.$$

Da auch A_α und A_β K-äquivariant auf $U'_\alpha \cap U'_\beta$ sind und $A_\alpha = \bar{s}^* A_\beta$ auf S, folgt, dass $A_\alpha = \tilde{s}_{\alpha\beta}^* A_\beta$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$.

Demnach definiert $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ einen ($W^{1,2}$-)Zusammenhang des durch die Übergangsabbildungen $\{\tilde{s}_{\alpha\beta}\}$ definierten Bündel $(P', \pi', M'; G)$ über M'.

Da die $\tilde{s}_{\alpha\beta}$ K-äquivariant sind, muss P' eine K-Operation zulassen, die verträglich ist mit der K-Operation auf P. $\square$

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde (unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1) die Existenz eines K-äquivarianten glatten Yang-Mills-Zusammenhangs $D+A$ eines Bündels P' über M' bewiesen.
Dabei ist $M' = M \setminus S$ mit einer singulären Menge S, die sich zusammensetzt aus der Vereinigung aller Orbits, deren Kodimension kleiner als vier ist, und einer höchstens abzählbaren Vereinigung von Orbits der Kodimension vier.

P' kann sich von $P|_{M'}$ unterscheiden, lässt jedoch ebenfalls eine K-Operation zu.

Der letzte Schritt im Beweis dieses Satzes wurde nur für den Fall bewiesen, dass M eine flache Mannigfaltigkeit ist, das Ergebnis sollte sich mit wenig mehr technischem Aufwand jedoch auch auf nicht flache Mannigfaltigkeiten übertragen lassen.

Zu diesem Zweck wurde (wiederum unter den Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1) ein Eichsatz bewiesen: Für jeden glatten K-äquivariante Zusammenhang $D+A$, der auf einem geeigneten Schlauch eine Kleinheitsbedingung an die Krümmung erfüllt, gibt es auf einem etwas kleineren Schlauch eine ebenfalls K-äquivariante Eichtransformation σ, sodass die $W^{1,2}$-Norm der umgeeichten Zusammenhangsform durch die L^2-Norm der Krümmung abgeschätzt ist.

Daran anschließend ergeben sich, wie teilweise bereits im Text vermerkt, noch einige weitere Fragestellungen:

So könnte man zunächst das Bündel P' näher betrachten. Wie bereits erwähnt, ist in Analogie zu [Sed82] zu erwarten, dass P' gewisse topologische Invarianten mit P gemeinsam hat, die gesucht werden sollten.

Weiterhin stellt sich die Frage, ob P' zu einem (glatten) Bündel über ganz M (oder zumindest über M^4 fortgesetzt werden kann.

Ist dies der Fall, so schließt sich die Frage an, ob die in dieser Arbeit gefundene Yang-Mills-Zusammenhangsform A auf M' fortgesetzt werden kann zu einer Zusammenhangsform auf M^4. Lokal im Inneren von M^4 wäre, die Fortsetzbarkeit des Bündels vorausgesetzt, wohl die Definition einer zulässigen Lösung nach [Tia00] erfüllt, sodass Fortsetzbarkeit zu einem glatten Yang-Mills-Zusammenhang direkt folgen würde. Da in [Pet13] gezeigt wird, dass beim Minimieren des Yang-Mills-Funktionals Singularitäten der Kodimension fünf auftreten können, liegt der Verdacht nahe, dass A über den “schlechten Orbits”, die aus dem Überdeckungsargument in Abschnitt 5.1 hervorgehen, fortgesetzt werden können, diejenigen über singulären Orbits, deren Kodimension kleiner ist als vier, jedoch nicht.

Schließlich könnte und sollte geprüft werden, auf welche anderen eichtheoretischen Probleme der hier bewiesene äquivariante Eichsatz (Satz 4.0.2) gewinnbringend angewandt werden kann. Eine interessante Anwendung wäre dabei zum Beispiel die Suche nach äquivarianten Lösungen der Yang-Mills-Higgs-Gleichungen.

Literaturverzeichnis

[Ada75] ADAMS, David R.: A Note on Riesz Potentials. In: *Duke Mathematical Journal* 42 (1975), Nr. 4, S. 765–778. – http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.dmj/1077311348 (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[AMR88] ABRAHAM, R. ; MARSDEN, J.E. ; RATIU, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag, 1988

[Bau09] BAUM, Helga: *Eichfeldtheorie*. Springer-Verlag, 2009

[Ble05] BLEECKER, David: *Gauge Theory and Variational Principles*. Dover Publications, Inc., 2005

[Bre05] BREZIS, Haim: *Analyse fonctionelle*. Dunod, 2005

[Don83] DONALDSON, Simon K.: An application of gauge theory to four-dimensional topology. In: *Journal of Differential Geometry* 18 (1983), Nr. 2, S. 279–315. – http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.jdg/1214437665 (zuletzt aufgerufen am 26.10.2015)

[DW71] DO CARMO, Manfredo P. ; WALLACH, Nolan R.: Minimal immersions of spheres into spheres. In: *Annals of Mathematics, Second Series* 93 (1971), S. 43–62

[Gas96] GASTEL, Andreas: *Regularitätstheorie für minimierende äquivariante (p-)harmonische Abbildungen*. Dissertation, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 1996

[Gas13] GASTEL, Andreas: Yang-Mills connections of cohomogeneity one on $SO(n)$-bundles over Euclidean spheres. In: *Asian Journal of Mathematics* 17 (2013), S. 139–161

[Gia83] GIAQUINTA, Mariano: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Systems*. Princeton University Press, 1983

[GP74] GUILLEMIN, Victor R. ; POLLACK, Alan: *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974

[GS14] Gastel, Andreas ; Scheven, Christoph: Minimizers of higher order gauge invariant functionals. (2014). – Preprint, http://de.arxiv.org/pdf/1501.02089v1 (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015); erscheint im Journal of Geometric Analysis

[GT01] Gilbarg, David ; Trudinger, Neil S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 2001

[GWH72] Greub ; Werner ; Hildbert: *Connections, curvature, and cohomology 1: De Rham cohomology of manifolds and vector bundles*. Academic Press, 1972

[Hea10] Healey, Richard: *Gauging What's Real – The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories*. Oxford University Press, 2010

[Jos08] Jost, Jürgen: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag, 2008

[Kaw91] Kawakubo, Katsuo: *The Theory of Transformation Groups*. Oxford University Press, 1991

[KJF77] Kufner, Alois ; John, Oldrich ; Fucik, Svatopluk: *Function Spaces*. Noordhoff International Publishing, 1977

[MR03] Meyer, Yves ; Rivière, Tristan: Partial Regularity result for a class of stationary Yang-Mills Fields. In: *Revista Matemática Iberoamericana* 19 (2003), Nr. 1

[Pal79] Palais, Richard: The Principle of Symmetric Criticality. In: *Communications in Mathematical Physics* 69 (1979), Nr. 1. – http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103905401 (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Par92] Parker, Thomas H.: A Morse Theory for Equivariant Yang-Mills. In: *Duke Mathematical Journal* 66 (1992), Nr. 2. – http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.dmj/1077294782 (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Pet13] Petrache, Mircea: A singular radial connection over B^5 minimizing the Yang-Mills energy. (2013). – Unveröffentlichtes Preprint, http://arxiv.org/pdf/1306.6763v1.pdf (zuletzt aufgerufen am 26.10.2015)

[PR13] Petrache, Mircea ; Rivière, Tristan: The resolution of the Yang-Mills Plateau problem in super-critical dimensions. (2013). – Unveröffentlichtes Preprint, http://arxiv.org/pdf/1306.2010v1.pdf (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Pri83] Price, Peter: A monotonicity formula for Yang-Mills fields. In: *manuscripta mathematica* 43 (1983), Nr. 2–3, S. 131–166

[PU04] Park, Joon-Sik ; Urakawa, Hajime: Yang-Mills Connections in Homogeneous Principal Fibre Bundles. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 10 (2004), Nr. 1, S. 79–90

[Rad97] Rade, Johan: A Compactness Theorem for Invariant Connections. (1997). – Unveröffentlichtes Preprint, `http://arxiv.org/pdf/dg-ga/9704007.pdf` (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Sed82] Sedlacek, Steven: A direct Method for Minimizing the Yang-Mills Functional over 4-Manifolds. In: *Communications in Mathematical Physics* 86 (1982), Nr. 4, S. 515–527. – `http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103921842` (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Tia00] Tian, Gang: Gauge theory and calibrated geometry, I. In: *Annals of Mathematics (2)* 151 (2000), Nr. 1, S. 193–268

[TT04] Tao, Terence ; Tian, Gang: A Singularity Removal Theorem for Yang-Mills-Fields in Higher Dimensions. In: *Journal of the American Mathematical Society* 17 (2004), Nr. 3, S. 557–593. – `http://www.ams.org/journals/jams/2004-17-03/S0894-0347-04-00457-6/S0894-0347-04-00457-6.pdf` (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Uhl82a] Uhlenbeck, Karen: Connections with L^p bounds on curvature. In: *Communications in Mathematical Physics* 83 (1982), Nr. 1, S. 31–42. – `http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103920743` (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Uhl82b] Uhlenbeck, Karen: Removable singularities in Yang-Mills-fields. In: *Communications in Mathematical Physics* 83 (1982), Nr. 1, S. 11–29. – `http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103920742` (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)

[Ura88] Urakawa, Hajime: Equivariant Theory of Yang-Mills Connections over Riemannian Manifolds of Cohomogenity One. In: *Indiana University Mathematics Journal* 37 (1988), Nr. 4, S. 753–788

[Weh04] Wehrheim, Katrin: *Uhlenbeck Compactness*. EMS Publishing House, 2004

[YM54] Yang, C. N. ; Mills, R. L.: Conservation of Isotopic Spin and Gauge Invariance. In: *Physical Review* 96 (1954), S. 191–195. – `http://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.96.191` (zuletzt aufgerufen am 12.10.2015)